2^{nde} corrigé DNS n° 4

Exercice 1

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2(x+2)(x-1) - (2-x)(x+2)$

1) a) $f(x) = 2(x+2)(x-1) - (2-x)(x+2)$
$= 2(x^2 - x + 2x - 2) - (2x + 4 - x^2 - 2x)$
$= 2x^2 - 2x + 4x - 4 - 2x - 4 + x^2 + 2x$
$\boxed{= 3x^2 + 2x - 8}$

b) $f(x) = 2(x+2)(x-1) - (2-x)(x+2)$
$= (x+2)[2(x-1) - (2-x)]$
$= (x+2)(2x - 2 - 2 + x)$
$\boxed{= (x+2)(3x-4)}$

2) Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations

a) $f(x) = 0$
$(x+2)(3x-4) = 0$
$x + 2 = 0$ ou $3x - 4 = 0$
$x = -2$ ou $3x = 4$
$x = \frac{4}{3}$

donc $\boxed{S = \left\{-2\,;\frac{4}{3}\right\}}$

b) $f(x) = -8$
$3x^2 + 2x - 8 = -8$
$3x^2 + 2x - 8 + 8 = 0$
$3x^2 + 2x = 0$
$x(3x + 2) = 0$
$x = 0$ ou $3x + 2 = 0$
$x = \frac{-2}{3}$

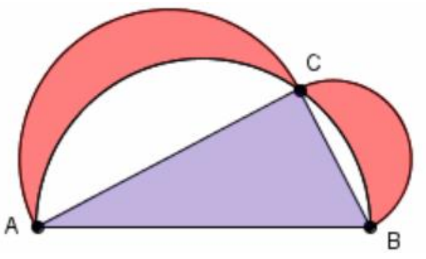
donc $\boxed{S = \left\{0\,;\frac{-2}{3}\right\}}$

3) *Pour déterminer l'intersection de Cf avec l'axe des ordonnées, on calcule $f(0)$.*
Avec la forme développée, on a $f(0) = 3 \times 0^2 + 2 \times 0 - 8 = -8$

donc Cf coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0\,; -8)$

<u>Exercice 2</u> Les lunulles d'Hippocrate

*Pour cet exercice, vous traitez **au choix**, soit le cas particulier (plus accesssible), soit le cas général (plus difficile)*



ABC est un triangle rectangle en C. On a tracé les demi-cercles de diamètre [AB], [AC] et [BC].On appelle lunules d'Hippocrate les 2 « croissants de lune » colorés.
L'aire des 2 lunules est-elle plus grande que l'aire du triangle ABC ?

*Répondre à cette question en choisissant l'étude d'un cas particulier **ou** l'étude du cas général*

Etude d'un cas particulier :
ABC est un triangle rectangle en C tel que AC = 4 et BC = 3.
a/ Calculer AB
Dans le triangle ABC rectangle en C, on a $AB^2 = AC^2 + BC^2 = 4^2 + 3^2 = 25$
donc $AB = \sqrt{25} = 5$

b/ Calculer l'aire du triangle ABC

$\text{aire}(ABC) = \frac{B \times h}{2} = \frac{AC \times BC}{2} = \frac{4 \times 3}{2} = 6$

c/ Calculer l'aire du demi-cercle de diamètre [AB], l'aire du demi-cercle de diamètre [AC] et l'aire du demi-cercle de diamètre [BC]

le demi-cercle de diamètre [AB] a pour rayon r $= \frac{AB}{2} = \frac{5}{2}$ et pour aire $A_1 = \frac{1}{2} \times \pi \times \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25\pi}{8}$

le demi-cercle de diamètre [AC] a pour rayon r $= \frac{AC}{2} = \frac{4}{2} = 2$ et pour aire $A_2 = \frac{1}{2} \times \pi \times 2^2 = 2\pi$

le demi-cercle de diamètre [BC] a pour rayon r $= \frac{BC}{2} = \frac{3}{2}$ et pour aire $A_3 = \frac{1}{2} \times \pi \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9\pi}{8}$

d/ En déduire l'aire des 2 lunules et conclure.

L'aire des 2 lunules réunis est alors

$$L = \text{aire}(ABC) + A_2 + A_3 - A_1 = 6 + 2\pi + \frac{9\pi}{8} - \frac{25\pi}{8} = 6 + 2\pi - \frac{16\pi}{8} = 6 + 2\pi - 2\pi = 6$$

On constate alors que **l'aire des 2 lunules est égale à l'aire du triangle ABC**

Etude du cas général :

ABC est un triangle rectangle en C et on note AB = c, AC = b et BC = a.

a/ Quelle égalité peut-on écrire concernant a, b et c ?

Dans le triangle ABC rectangle en C, on a $AC^2 + BC^2 = AB^2$ donc $b^2 + a^2 = c^2$

b/ Exprimer l'aire du triangle ABC en fonction de a et b

$$\text{aire}(ABC) = \frac{B \times h}{2} = \frac{AC \times BC}{2} = \frac{a \times b}{2}$$

c/ Exprimer, en fonction de a, b et c, l'aire de chacun des demi-cercles de diamètre [AB], [AC] et [BC]

le demi-cercle de diamètre [AB] a pour rayon r $= \frac{AB}{2} = \frac{c}{2}$ et pour aire $A_1 = \frac{1}{2} \times \pi \times \left(\frac{c}{2}\right)^2 = \frac{\pi\, c^2}{8}$

le demi-cercle de diamètre [AC] a pour rayon r $= \frac{AC}{2} = \frac{b}{2}$ et pour aire $A_2 = \frac{1}{2} \times \pi \times \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{\pi\, b^2}{8}$

le demi-cercle de diamètre [BC] a pour rayon r $= \frac{BC}{2} = \frac{a}{2}$ et pour aire $A_3 = \frac{1}{2} \times \pi \times \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{\pi\, a^2}{8}$

d/ En déduire l'aire des 2 lunules et conclure.

L'aire des 2 lunules réunis est alors

$$L = \text{aire}(ABC) + A_2 + A_3 - A_1 = \frac{a \times b}{2} + \frac{\pi\, b^2}{8} + \frac{\pi\, a^2}{8} - \frac{\pi\, c^2}{8} = \frac{a \times b}{2} + \frac{\pi}{8} \times (b^2 + a^2 - c^2)$$

or $b^2 + a^2 = c^2$ donc $L = \frac{a \times b}{2} + \frac{\pi}{8} \times (c^2 - c^2) = \frac{a \times b}{2}$

Ce qui signifie que **l'aire des 2 lunules est toujours égale à l'aire du triangle ABC**

<u>Question Bonus :</u>

En jouant avec des allumettes, un enfant a écrit 2 égalités en chiffres romains, mais elles sont fausses ! Après lui avoir dit qu'il était dangereux de jouer avec des allumettes, son papa, professeur de mathématiques, lui explique qu'il lui suffit, pour chacune d'elles, de déplacer une barre pour que l'égalité soit vraie. Laquelle et comment ?

a) V + VII = III x V devient V + VII = II x VI

b) V + III = I devient V − III = II

ou V + III = I devient IV − III = I