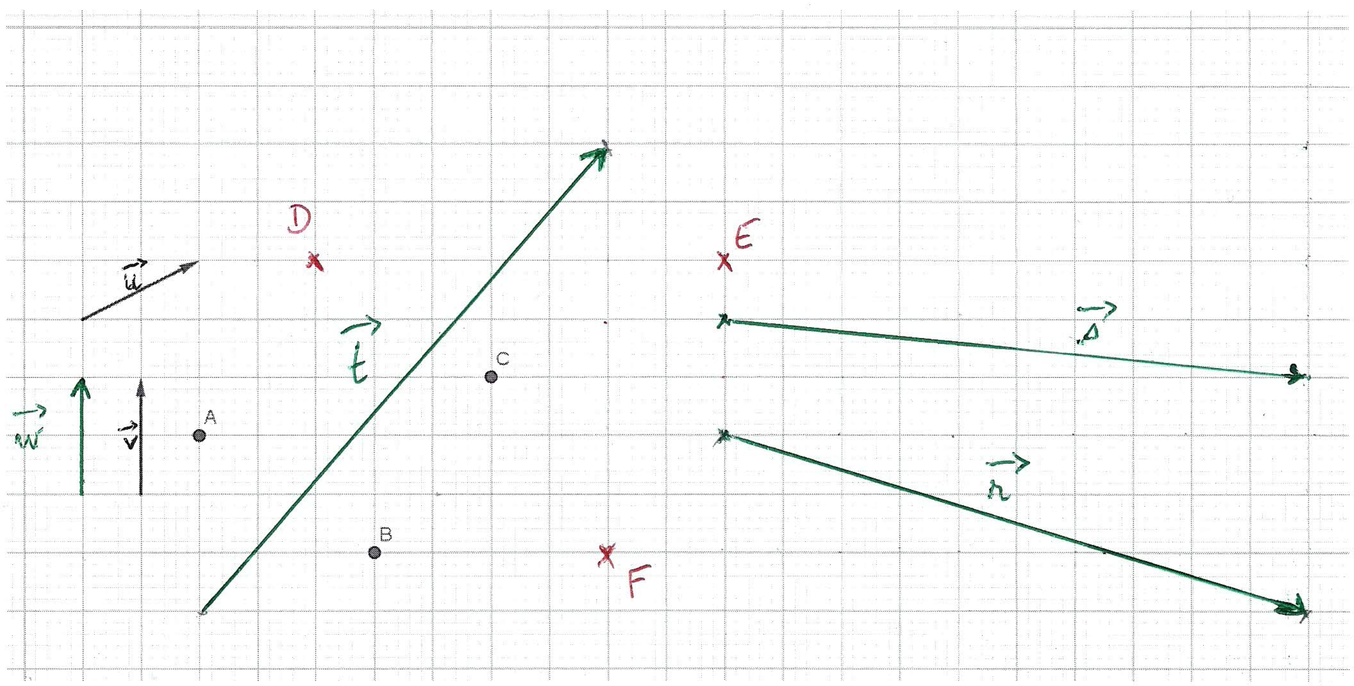
Exercice 1

On donne ci-après les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et 3 points A, B et C.



a) Construire les points D, E et F définis par

$\overrightarrow{AD} = \vec{u} + \vec{v}$ $\quad\quad$ $\overrightarrow{BE} = 3\vec{u} + \vec{v}$ $\quad\quad$ $\overrightarrow{CF} = \vec{u} - 2\vec{v}$

b) Exprimer en fonction des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ les vecteurs définis par :

$\vec{r} = 2\overrightarrow{AD} + 3\overrightarrow{CF} = 2(\vec{u} + \vec{v}) + 3(\vec{u} - 2\vec{v}) = 2\vec{u} + 2\vec{v} + 3\vec{u} - 6\vec{v} = 5\vec{u} - 4\vec{v}$

$\vec{s} = 2\overrightarrow{CF} + \overrightarrow{BE} = 2(\vec{u} - 2\vec{v}) + 3\vec{u} + \vec{v} = 2\vec{u} - 4\vec{v} + 3\vec{u} + \vec{v} = 5\vec{u} - 3\vec{v}$

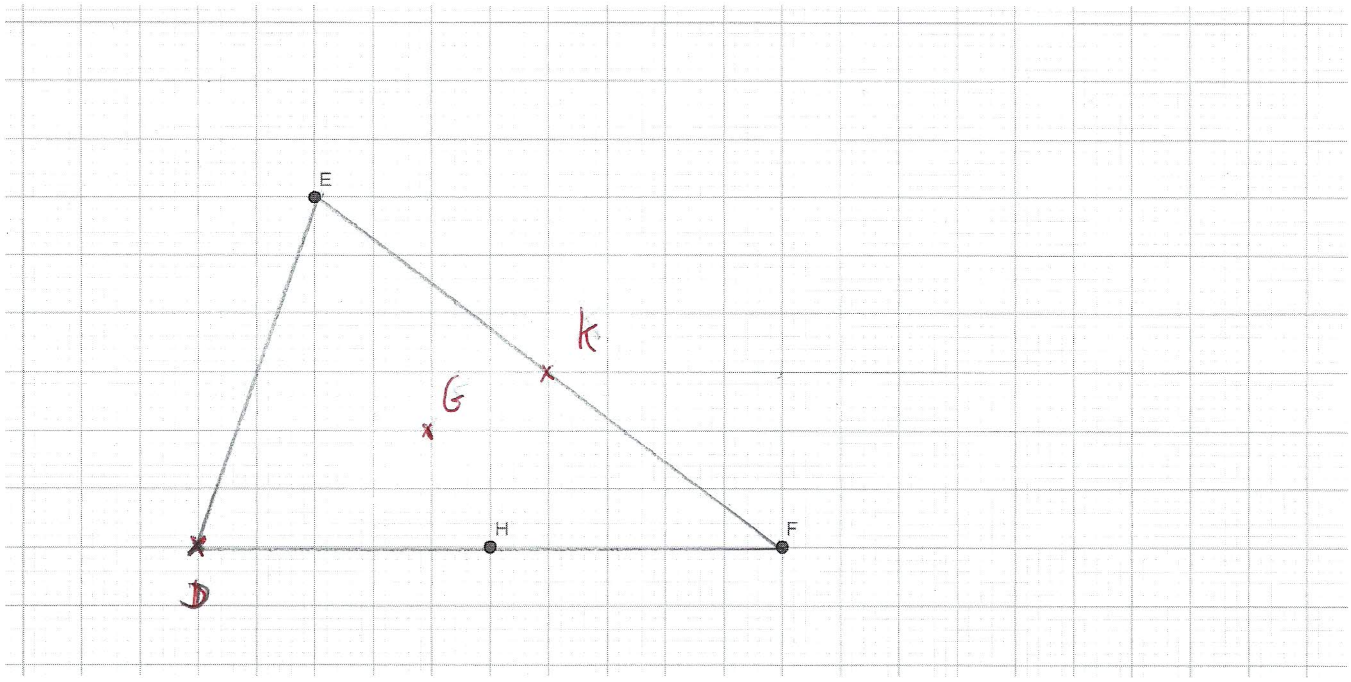
$\vec{t} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BE} + 2\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(3\vec{u} + \vec{v}) + 2(\vec{u} + \vec{v}) = \frac{3}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} + 2\vec{u} + 2\vec{v} = \frac{7}{2}\vec{u} + \frac{5}{2}\vec{v}$

$\vec{w} = \overrightarrow{BE} - 2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{FC} = 3\vec{u} + \vec{v} - 2(\vec{u} + \vec{v}) + (-\vec{u} + 2\vec{v})$

$= 3\vec{u} + \vec{v} - 2\vec{u} - 2\vec{v} - \vec{u} + 2\vec{v} = \vec{v}$

c) Construire dans le graphique précédent un représentant de chacun des vecteurs $\vec{r}$, $\vec{s}$, $\vec{t}$ *et* $\vec{w}$

Exercice 2
On considère trois points E, F et H



1/ a) Construire les points D, G et K définis par $\overrightarrow{FD} = 2\overrightarrow{FH}$ $\quad \overrightarrow{EG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{EH}$ et $\overrightarrow{FK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{FE}$

b) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{DG}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{HF}$ et $\overrightarrow{HE}$

$\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{DH} + \overrightarrow{HG} = \overrightarrow{HF} + \frac{1}{3}\overrightarrow{HE}$ car $\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{HF}$ et $\overrightarrow{HG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{HE}$

c) Montrer que $\overrightarrow{DK} = \frac{3}{2}\overrightarrow{HF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{HE}$

$\overrightarrow{DK} = \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{FK} = 2\overrightarrow{HF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{FE} = 2\overrightarrow{HF} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{FH} + \overrightarrow{HE}) = 2\overrightarrow{HF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{FH} + \frac{1}{2}\overrightarrow{HE} = 2\overrightarrow{HF} - \frac{1}{2}\overrightarrow{HF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{HE}$
$= \frac{3}{2}\overrightarrow{HF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{HE}$

d) En déduire que $\overrightarrow{DG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DK}$

$\frac{2}{3}\overrightarrow{DK} = \frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}\overrightarrow{HF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{HE}\right) = \frac{2}{3}\times\frac{3}{2}\overrightarrow{HF} + \frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\overrightarrow{HE} = \overrightarrow{HF} + \frac{1}{3}\overrightarrow{HE} = \overrightarrow{DG}$

2/ On considère le triangle EDF construit précédemment.

a) Que représente la droite (DK) pour le triangle EDF ?

K est le milieu de [EF] donc (DK) est la médiane issue de D

b) Que représente la droite (EH) pour le triangle EDF ?

H est le milieu de [DF] donc (EH) est la médiane issue de E

c) Que représente alors le point G pour le triangle EDF ?

G est le point d'intersection des 2 médianes, c'est donc le centre de gravité du triangle EDF

Conclusion :
On vient de démontrer la propriété suivante :

> Dans un triangle, le centre de gravité de ce triangle
> est situé au $\frac{2}{3}$ de chaque médiane à partir du sommet (car $\overrightarrow{DG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DK}$)