Exercice 1

a/ $E\left(\frac{2+4}{2}\ ;\ \frac{1+2}{2}\ ;\ \frac{5+4}{2}\right) \Leftrightarrow\ E\left(3\,;\frac{3}{2}\,;\frac{9}{2}\right)$

b/ $\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix}0\\ -\frac{3}{2}\\ -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

c/ CEFD est un parallélogramme $\Leftrightarrow\ \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{DF}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}0\\ -\frac{3}{2}\\ -\frac{1}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_F-0\\ y_F-3\\ z_F-7\end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x_F = 0 \\ y_F = -\frac{3}{2}+3 = \frac{3}{2} \\ z_F = -\frac{1}{2}+7 = \frac{13}{2}\end{cases} \quad \text{donc } F\left(0;\frac{3}{2}\,;\frac{13}{2}\right)$$

d/

$\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-2\\ 2\\ 2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BC}$ donc $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires

donc (AD) et (BC) sont parallèles

Exercice 2

1) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3\\ -2\\ 2\end{pmatrix}$ $\frac{2}{-3} \neq \frac{0}{-2}$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires

donc A, B, C ne sont pas alignés

2) a) $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}7\\ 2\\ 0\end{pmatrix}$ d'où $2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}$ a pour coordonnées

$$2\begin{pmatrix}2\\ 0\\ 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-3\\ -2\\ 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}7\\ 2\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4-(-3)-7\\ 0-(-2)-2\\ 2-2-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

b) on a alors $2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD} = \vec{0}$ $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$

donc $D \in (ABC)$

Exercice 3

1) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\ -2\\ 4\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\ -2\\ 1\end{pmatrix}$ or $\frac{0}{4} \neq \frac{-2}{-2}$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas

colinéaires donc A, B, C ne

sont pas alignés et définissent un plan

2/ a/

$\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}-2\\3\\-3\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires si il existe α et β tels que

$\overrightarrow{DE} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$

$$\begin{pmatrix}-2\\3\\-3\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}4\\-2\\4\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix} \iff \begin{cases}-2 = 4\alpha\\ 3 = -2\alpha - 2\beta\\ -3 = 4\alpha + \beta\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}\alpha = -\frac{2}{4} = -0,5\\ 3 = -2\times(-0,5) - 2\beta\\ -3 = 4\times(-0,5) + \beta\end{cases} \iff \begin{cases}\alpha = -0,5\\ 3 = 1 - 2\beta\\ -3 = -2 + \beta\end{cases} \iff \begin{cases}\alpha = -0,5\\ 2\beta = 1 - 3\\ -3 + 2 = \beta\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}\alpha = -0,5\\ 2\beta = -2\\ -1 = \beta\end{cases} \iff \begin{cases}\alpha = -0,5\\ \beta = -\frac{2}{2}\\ \beta = -1\end{cases} \iff \begin{cases}\alpha = -0,5\\ \beta = -1\\ \beta = -1\end{cases}$$

ainsi $\overrightarrow{DE} = -0,5\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires

b/ Les vecteurssont coplanaires mais on **ne peut pas en déduire** que les **points** A, B, C, D et E sont coplanaires (car il y a 5 points !)

c/ Puisque A, B et C déterminent un plan, on peut en déduire que la droite (DE) est parallèle au plan (ABC)

Exercice 4

$A(0;0;0)$ $B(1;0;0)$ $C(1;1;0)$ $D(0;1;0)$ $E(0;0;1)$ $F(1;0;1)$ $G(1;1;1)$ $H(0;1;1)$

1) a) I milieu de [AE] donc $I\left(\frac{0+0}{2};\frac{0+0}{2};\frac{0+1}{2}\right)$ $I\left(0;0;\frac{1}{2}\right)$

J milieu de [CH] donc $J\left(\frac{1+0}{2};\frac{1+1}{2};\frac{0+1}{2}\right)$ $J\left(\frac{1}{2};1;\frac{1}{2}\right)$

2/ a/

$\vec{EP} = \frac{1}{3}\vec{EH}$

$$\begin{pmatrix} x_P - 0 \\ y_P - 0 \\ z_P - 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_P = \frac{1}{3}\times 0 = 0 \\ y_P = \frac{1}{3}\times 1 = \frac{1}{3} \\ z_P - 1 = \frac{1}{3}\times 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_P = 0 \\ y_P = \frac{1}{3} \\ z_P = 1 \end{cases} \quad P\left(0 ; \frac{1}{3} ; 1\right)$$

$\vec{AQ} = \frac{1}{3}\vec{AC}$

$$\begin{pmatrix} x_Q - 0 \\ y_Q - 0 \\ z_Q - 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_Q = \frac{1}{3} \\ y_Q = \frac{1}{3} \\ z_Q = 0 \end{cases} \quad Q\left(\frac{1}{3} ; \frac{1}{3} ; 0\right)$$

K milieu de [PQ] donc $K\left(\frac{0+\frac{1}{3}}{2} ; \frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}{2} ; \frac{1+0}{2}\right)$ $K\left(\frac{1}{6} ; \frac{1}{3} ; \frac{1}{2}\right)$

b) $\vec{IK}\begin{pmatrix} \frac{1}{6} - 0 \\ \frac{1}{3} - 0 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ $\vec{IK}\begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{IJ}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$ donc $\vec{IJ} = 3\vec{IK}$ donc $\vec{IJ}$ et $\vec{IK}$ sont colinéaires

donc I, J, K sont alignés.