Exercice du cours : corrigé

calculer la valeur moyenne sur [2 ;10] de la fonction f définie par $f(x) = -0{,}2x^2 + 2x + 3$

Une primitive de f est $F(x) = -0{,}2 \times \frac{x^3}{3} + x^2 + 3x$ alors

$$m = \frac{1}{10-2}\int_2^{10}(-0{,}2x^2 + 2x + 3)dx = \frac{1}{8}\,(F(10) - F(2))$$

$$= \frac{1}{8}\left(\left(-0{,}2 \times \frac{10^3}{3} + 10^2 + 3 \times 10\right) - \left(-0{,}2 \times \frac{2^3}{3} + 2^2 + 3 \times 2\right)\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(\left(\frac{-200}{3} + 130\right) - \left(\frac{-1{,}6}{3} + 10\right)\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{-198{,}4}{3} + 120\right)$$

$$= \frac{1}{8} \times \frac{161{,}6}{3}$$

$$= \frac{101}{15}$$ *donc la valeur moyenne de f sur [2;10] est* $m = \frac{101}{15} \approx 6{,}73$

Application : corrigé

Suite à un accident industriel, un gaz se répand dans un local d'usine. On admet qu'au-delà de six minutes, il n'y a quasiment plus de gaz dans l'air.
On modélise l'évolution du taux de gaz dans l'air par la fonction f définie sur [0 ;6] par f $(x) = 2xe^{-x}$ où x est le nombre de minutes écoulées depuis l'accident et f (x) le taux de gaz dans l'air exprimé en ppm (partie par million).

a Justifier que la fonction F définie sur [0 ;6] par F$(x) = (-2x-2)e^{-x}$ est une primitive de f sur [0 ;6]

F est une primitive de f si $F'(x) = f(x)$ or $F = uv$ avec $u(x) = -2x - 2$ et $v(x) = e^{-x}$
$u'(x) = -2$ et $v'(x) = -e^{-x}$

Alors $F'(x) = -2e^{-x} - e^{-x}(-2x-2) = -2e^{-x} + 2xe^{-x} + 2e^{-x} = 2xe^{-x} = f(x)$

D'où F définie par $\boldsymbol{F(x) = (-2x-2)e^{-x}}$ est une primitive de f sur [0 ; 6]

b/ On considère que le gaz a un effet irritant pour l'organisme si le taux moyen de gaz dans l'air pendant les 4 premières minutes est supérieur à 0,5 ppm.
Calculer la valeur moyenne de f sur [0 ;4] et en déduire si le personnel de l'usine a été affecté ou non par la fuite de gaz.

$$m = \frac{1}{4-0}\int_0^4 f(x)dx = \frac{1}{4}\,[F(x)]_0^4 = \frac{1}{4}\left((-2\times 4 - 2)e^{-4} - (-2\times 0 - 2)e^{0}\right) = \frac{1}{4}(-10e^{-4} + 2) \approx \mathbf{0{,}454}$$

Ainsi $\boldsymbol{m < 0{,}5}$ **donc le personnel n'a pas été affecté par la fuite de gaz.**