Exercice 1

a) $4lnx - 5 = 7$

$\Leftrightarrow 4lnx = 12$

$\Leftrightarrow lnx = 3$

$\Leftrightarrow x = e^3$

$S = \{ e^3 \}$

b) $0{,}5e^x + 4 = 11$

$\Leftrightarrow 0{,}5e^x = 7$

$\Leftrightarrow e^x = \frac{7}{0{,}5}$

$\Leftrightarrow e^x = 14$

$\Leftrightarrow x = \ln 14$

$S = \{ \ln 14 \}$

c) $(e^x - 4)(lnx + 3) = 0$

$\Leftrightarrow e^x - 4 = 0 \quad ou \quad \ln x + 3 = 0$

$\Leftrightarrow e^x = 4 \quad ou \quad \ln x = -3$

$\Leftrightarrow x = \ln 4 \quad ou \quad x = e^{-3}$

$S = \{ ln4 \,;\, e^{-3} \}$

d) $11 - 5\ln x \geq 1$

$\Leftrightarrow \ -5\ln(x) \geq \ -10$

$\Leftrightarrow \ln(x) \leq \frac{-10}{-5}$

$\Leftrightarrow \ln(x) \leq 2$

$\Leftrightarrow x \leq e^2$

$or\ x > 0 \ \ donc \ \ S =]\, 0 \,;\, e^2 \,]$

e) $e^{x-3} \geq 15$

$\Leftrightarrow x - 3 \geq ln15$

$\Leftrightarrow x \geq 3 + ln15$

$S = [\, 3 + ln15 \,;\, +\infty \,[$

f) $(2x + 7)(\ln x - 3) = 0$

$\Leftrightarrow 2x + 7 = 0 \quad ou \quad \ln x - 3 = 0$

$\Leftrightarrow 2x = -7 \quad ou \quad \ln x = 3$

$\Leftrightarrow x = -\frac{7}{2} \quad ou \quad x = e^3$

$or\ x > 0 \ \ donc\ -\frac{7}{2}\ ne\ convient\ pas \quad donc \quad S = \{ e^3 \}$

Exercice 2 :: Déterminer la fonction dérivée des fonctions f et g définies sur $]\, 0 \,;\, +\infty \,[$ par :

$f(x) = 3\,lnx + 5x^2 - 1$

$f\,'(x) = 3 \times \frac{1}{x} + 5 \times 2x$

$= \frac{3}{x} + 10x$

$(= \frac{3+10x^2}{x})$

$g(x) = (2x + 1)ln\,(x)$

$g = u \times v \quad avec \quad u(x) = 2x + 1 \quad et \quad v(x) = \ln(x)$

$u'(x) = 2 \qquad v'(x) = \frac{1}{x}$

$or\ (\,uv\,)' = u'v + uv'$ donc

$g\,'(x) = 2\ln(x) + (2x + 1) \times \frac{1}{x}$

$= 2\ln(x) + 2x \times \frac{1}{x} + 1 \times \frac{1}{x}$

$= 2\ln(x) + 2 + \frac{1}{x}$

Exercice 4 : Soit la fonction f définie sur [1 ; 20] par $f(x) = \frac{3lnx-3}{x}$

a/ Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = \frac{6-3lnx}{x^2}$

$$f = \frac{u}{v} \quad avec \quad u(x) = 3lnx - 3 \quad et \quad v(x) = x$$

$$u'(x) = 3 \times \frac{1}{x} = \frac{3}{x} \qquad v'(x) = 1$$

$$or \ \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \qquad donc \ \ f'(x) = \frac{\frac{3}{x} \times x - (3lnx - 3) \times 1}{x^2} = \frac{3 - 3lnx + 3}{x^2} = \frac{6 - 3lnx}{x^2}$$

b/ Etablir en justifiant le tableau de variation de f sur [1 ; 20]

x	1		e^2		20
$6-3lnx$		$+$	0	$-$	
x^2			$+$		
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-3	↗	$\frac{3}{e^2}$	↘	$\frac{3\ln 20-3}{20}$

$6 - 3lnx \geq 0$

$\Leftrightarrow -3lnx \geq -6$

$\Leftrightarrow lnx \leq \frac{-6}{-3}$

$\Leftrightarrow lnx \leq 2$

$\Leftrightarrow x \leq e^2$

$$f(1) = \frac{3ln1 - 3}{1} = -3$$

$$f(e^2) = \frac{3\ln(e^2) - 3}{e^2} = \frac{3 \times 2 - 3}{e^2} = \frac{3}{e^2} \approx 0{,}406$$

$$f(20) = \frac{3ln20 - 3}{20} \approx 0{,}299$$