MATHS Complémentaires Groupe 1	**interrogation n° 6A CORRIGE**	**le 23/02/2024**

Exercice :
La société Véloc, spécialisée dans la location de vélos, a été créée en janvier 2018 avec un parc de 180 vélos neufs. Afin de conserver un parc de bonne qualité, le directeur de la société a décidé :

- de revendre 20 % des vélos les plus usagés en janvier de chaque année.
- de racheter 60 vélos neufs en janvier de chaque année.
-

Pour tout entier naturel n on note u_n le nombre de vélos du parc en janvier 2018+n.

On a donc $u_0 = 180$ et, pour tout entier n, $u_{n+1} = 0{,}8u_n + 60$

1. Calculer u_1 . Interpréter le résultat.

$u_1 = 0{,}8 \times 180 + 60 = 204$ ce qui signifie que le nombre de vélos du parc est de 204 en janvier 2019

2. Déterminer le réel α tel que $\alpha = 0{,}8\alpha + 60$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha - 0{,}8\alpha = 60$$
$$\Leftrightarrow \quad 0{,}2\alpha = 60$$
$$\Leftrightarrow \quad \alpha = \frac{60}{0{,}2}$$
$$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\alpha = 300}$$

3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier n par $v_n = u_n - \alpha$
Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le 1^er^ terme.

$\boldsymbol{v_n = u_n - \alpha = u_n - 300}$

Cette suite (v_n) est géométrique car : $v_{n+1} = u_{n+1} - 300$

$= 0{,}8u_n + 60 - 300$

$= 0{,}8u_n - 240$

or si $v_n = u_n - 300$ alors $u_n = v_n + 300$

on obtient alors $\boldsymbol{v_{n+1}} = 0{,}8(v_n + 300) - 240$
$= 0{,}8v_n + 240 - 240$
$= \boldsymbol{0{,}8v_n}$

donc **(v_n) est une suite géométrique** de raison q = 0,8

et de 1^er^ terme $v_0 = u_0 - 300 = 180 - 300 = -120$

4. En déduire que pour tout entier n, on a $u_n = -120 \times 0{,}8^n + 300$

On a alors $\boldsymbol{v_n = v_0 \times q^n} = -120 \times 0{,}8^n$

Et puisque $u_n = v_n + 300$ on obtient finalement $\boldsymbol{u_n = -120 \times 0{,}8^n + 300}$

5. Combien de vélos la société Véloc possèdera-t-elle en janvier 2025 ?

2025 = 2018 + 7 il faut donc calculer u_7 or $u_7 = -120 \times 0{,}8^7 + 300 \approx 274{,}83 \approx 275$

donc la société Véloc possèdera 275 vélos en janvier 2025

6. Le directeur de la société estime qu'il lui faudra embaucher un nouvel employé pour s'occuper de la maintenance des vélos lorsque le nombre de vélos dépassera 320.
Le directeur devra-t-il embaucher un nouvel employé ?

On a $u_n = -120 \times 0{,}8^n + 300$ et on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}8^n = 0$ car $0 < 0{,}8 < 1$

alors $\lim\limits_{n\to+\infty} -120 \times 0{,}8^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -120 \times 0{,}8^n + 300 = 300$

Donc $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 300}$

Ce résultat signifie qu'à long terme, le nombre de vélos du parc va se stabiliser à 300 et ne dépassera donc jamais 320, donc le directeur ne devra pas embaucher un nouvel employé.

MATHS Complémentaires Groupe 1	interrogation n° 6B CORRIGE	le 23/02/2024

Exercice :
La société Véloc, spécialisée dans la location de vélos, a été créée en janvier 2018 avec un parc de 150 vélos neufs. Afin de conserver un parc de bonne qualité, le directeur de la société a décidé :
- de revendre 20 % des vélos les plus usagés en janvier de chaque année.
- de racheter 40 vélos neufs en janvier de chaque année.
-

Pour tout entier naturel n on note u_n le nombre de vélos du parc en janvier 2018+n.

On a donc $u_0 = 150$ et, pour tout entier n, $u_{n+1} = 0{,}8u_n + 40$

1. Calculer u_1 . Interpréter le résultat.

$u_1 = 0{,}8 \times 150 + 40 = 160$ ce qui signifie que le nombre de vélos du parc est de 160 en janvier 2019

2. Déterminer le réel α tel que $\alpha = 0{,}8\alpha + 40$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha - 0{,}8\alpha = 40$$
$$\Leftrightarrow \quad 0{,}2\alpha = 40$$
$$\Leftrightarrow \quad \alpha = \frac{40}{0{,}2}$$
$$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\alpha = 200}$$

3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier n par $v_n = u_n - \alpha$
   Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le 1er terme.

$\boldsymbol{v_n = u_n - \alpha = u_n - 200}$

Cette suite (v_n) est géométrique car : $v_{n+1} = u_{n+1} - 200$

$= 0{,}8u_n + 40 - 200$

$= 0{,}8u_n - 160$

or si $v_n = u_n - 200$ alors $u_n = v_n + 200$

on obtient alors
$$\boldsymbol{v_{n+1}} = 0{,}8(v_n + 200) - 160$$
$$= 0{,}8v_n + 160 - 160$$
$$= \boldsymbol{0{,}8v_n}$$

donc **(v_n) est une suite géométrique** de raison q = 0,8

et de 1er terme $v_0 = u_0 - 200 = 150 - 200 = -50$

4. En déduire que pour tout entier n, on a $u_n = -50 \times 0{,}8^n + 200$

On a alors $\boldsymbol{v_n = v_0 \times q^n} = -50 \times 0{,}8^n$

Et puisque $u_n = v_n + 200$ on obtient finalement $\boldsymbol{u_n = -50 \times 0{,}8^n + 200}$

5. Combien de vélos la société Véloc possèdera-t-elle en janvier 2027 ?

2027 = 2018 + 9 il faut donc calculer u_9 or $u_9 = -50 \times 0{,}8^9 + 200 \approx 193{,}3 \approx 193$

donc la société Véloc possèdera 193 vélos en janvier 2027

6. Le directeur de la société estime qu'il lui faudra embaucher un nouvel employé pour s'occuper de la maintenance des vélos lorsque le nombre de vélos dépassera 230.
   Le directeur devra-t-il embaucher un nouvel employé ?

On a $u_n = -50 \times 0{,}8^n + 200$ et on sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}8^n = 0$ car $0 < 0{,}8 < 1$

alors $\lim\limits_{n \to +\infty} -50 \times 0{,}8^n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} -50 \times 0{,}8^n + 200 = 200$

Donc $\boldsymbol{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 200}$

Ce résultat signifie qu'à long terme, le nombre de vélos du parc va se stabiliser à 200 et ne dépassera donc jamais 230, donc le directeur ne devra pas embaucher un nouvel employé.