MATHS Complémentaires Groupe 2 **interrogation n° 6A corrigé** **le 20/02/2024**

Exercice :
Lors de son hospitalisation, on injecte en intra-veineuse une dose de 12 cm^3 d'un médicament à un patient. Le médicament étant assimilé peu à peu, la concentration de médicament dans le sang diminue de 40 % toutes les 30 minutes. Pour maintenir une efficacité constante de ce médicament, on injecte au patient 3 cm^3 de ce même médicament toutes les 30 minutes.
Pour tout entier naturel n on note u_n le volume de médicament présent dans le sang du patient en cm^3 au bout de $n \times 30$ minutes.

On a donc $u_0 = 12$ et, pour tout entier n, $u_{n+1} = 0{,}6u_n + 3$

1. Calculer u_1. Interpréter le résultat.

$u_1 = 0{,}6 \times 12 + 3 = 10{,}2$ ce qui signifie que le volume de médicament présent dans le sang du patient au bout de 30 minutes est de 10,2 cm^3

2. Déterminer le réel α tel que $\alpha = 0{,}6\alpha + 3$

$\Leftrightarrow \quad \alpha - 0{,}6\alpha = 3$

$\Leftrightarrow \quad 0{,}4\alpha = 3$

$\Leftrightarrow \quad \alpha = \frac{3}{0{,}4}$

$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\alpha = 7{,}5}$

3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier n par $v_n = u_n - \alpha$
   Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le 1er terme.

$\boldsymbol{v_n = u_n - \alpha = u_n - 7{,}5}$

Cette suite (v_n) est géométrique car : $v_{n+1} = u_{n+1} - 7{,}5$

$= 0{,}6u_n + 3 - 7{,}5$

$= 0{,}6u_n - 4{,}5$

or si $v_n = u_n - 7{,}5$ alors $u_n = v_n + 7{,}5$

on obtient alors $\boldsymbol{v_{n+1}} = 0{,}6(v_n + 7{,}5) - 4{,}5$
$= 0{,}6v_n + 4{,}5 - 4{,}5$
$= \boldsymbol{0{,}6v_n}$

donc $\boldsymbol{(v_n)}$ **est une suite géométrique** de raison $q = 0{,}6$

et de 1er terme $v_0 = u_0 - 7{,}5 = 12 - 7{,}5 = 4{,}5$

4. En déduire que pour tout entier n, on a $u_n = 4{,}5 \times 0{,}6^n + 7{,}5$

On a alors $\boldsymbol{v_n = v_0 \times q^n} = 4{,}5 \times 0{,}6^n$

Et puisque $u_n = v_n + 7{,}5$ on obtient finalement $\boldsymbol{u_n = 4{,}5 \times 0{,}6^n + 7{,}5}$

5. Quel est le volume de médicament présent dans le sang du patient au bout de 5 heures ?

5 heures = 10 x 30 minutes donc il faut calculer u_{10} or $u_{10} = 4{,}5 \times 0{,}6^{10} + 7{,}5 \approx 7{,}53$

donc le volume de médicament présent dans le sang du patient au bout de 5 heures est d'environ 7,53 cm^3

6. On estime que le médicament reste efficace tant que le volume de médicament présent dans le sang du patient reste supérieur à 6 cm^3.
Le médicament restera-t-il efficace pendant toute la durée de l'hospitalisation de ce patient ?

On a $u_n = 4,5 \times 0,6^n + 7,5$ et on sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,6^n = 0$ car $0 < 0,6 < 1$

alors $\lim\limits_{n \to +\infty} 4,5 \times 0,6^n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} 4,5 \times 0,6^n + 7,5 = 7,5$

Donc $\boldsymbol{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 7,5}$

Ce résultat signifie qu'à long terme, le volume de médicament présent dans le sang du patient va se stabiliser à 7,5 cm3 et restera donc supérieur à 6 cm^3, donc le médicament restera efficace pendant toute la durée de l'hospitalisation de ce patient.

MATHS Complémentaires Groupe 2	**interrogation n° 6B corrigé**	**le 20/02/2024**

Exercice :
Lors de son hospitalisation, on injecte en intra-veineuse une dose de 10 mg de médicament à un patient. Le médicament étant assimilé peu à peu, la concentration de médicament dans le sang diminue de 20 % toutes les 30 minutes. Pour améliorer l'efficacité de ce médicament, on injecte à ce patient 2,5 mg de ce même médicament toutes les 30 minutes.
Pour tout entier naturel n on note u_n la quantité de médicament présente dans le sang du patient en mg au bout de $n \times 30$ minutes.

On a donc $u_0 = 10$ et, pour tout entier n, $u_{n+1} = 0,8u_n + 2,5$

1. Calculer u_1. Interpréter le résultat.
   $u_1 = 0,8 \times 10 + 2,5 = 10,5$ ce qui signifie que la quantité de médicament présente dans le sang du patient au bout de 30 minutes est de 10,5 mg

2. Déterminer le réel α tel que $\alpha = 0,8\alpha + 2,5$

$\Leftrightarrow \quad \alpha - 0,8\alpha = 2,5$

$\Leftrightarrow \quad 0,2\alpha = 2,5$

$\Leftrightarrow \quad \alpha = \frac{2,5}{0,2}$

$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\alpha = 12,5}$

3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier n par $v_n = u_n - \alpha$
   Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le 1er terme.
   $\boldsymbol{v_n = u_n - \alpha = u_n - 12,5}$

Cette suite (v_n) est géométrique car : $v_{n+1} = u_{n+1} - 12,5$

$= 0,8u_n + 2,5 - 12,5$

$= 0,8u_n - 10$

or si $v_n = u_n - 12,5$ alors $u_n = v_n + 12,5$

on obtient alors $\boldsymbol{v_{n+1}} = 0{,}8(v_n + 12{,}5) - 10$
$= 0{,}8v_n + 10 - 10$
$= \mathbf{0{,}8}\boldsymbol{v_n}$

donc **$(\boldsymbol{v_n})$ est une suite géométrique** de raison q = 0,8

et de 1er terme $v_0 = u_0 - 7{,}5 = 10 - 7{,}5 = -2{,}5$

4. En déduire que pour tout entier n, on a $u_n = -2{,}5 \times 0{,}8^n + 12{,}5$

    On a alors $\boldsymbol{v_n = v_0 \times q^n} = -2{,}5 \times 0{,}8^n$

    Et puisque $u_n = v_n + 12{,}5$ on obtient finalement $\boldsymbol{u_n = -2{,}5 \times 0{,}8^n + 12{,}5}$

5. On estime qu'il y a « risque » pour le patient si la quantité de médicament présente dans le sang du patient dépasse 15 mg.
   Y aura-t-il « risque » pour le patient pendant son hospitalisation ?

On a $u_n = -2{,}5 \times 0{,}8^n + 12{,}5$ et on sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}8^n = 0$ car $0 < 0{,}8 < 1$

alors $\lim\limits_{n \to +\infty} -2{,}5 \times 0{,}8^n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} -2{,}5 \times 0{,}8^n + 12{,}5 = 12{,}5$

Donc $\boldsymbol{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 12{,}5}$

Ce résultat signifie qu'à long terme, la quantité de médicament présent dans le sang du patient va se stabiliser à 12,5 mg et restera donc inférieure à 15 mg, donc il n'y a pas de « risque » pour ce patient pendant son hospitalisation.

6. Quelle est la quantité de médicament présente dans le sang du patient au bout de 5 heures ?

    5 heures = 10 x 30 minutes donc il faut calculer u_{10} or $u_{10} = -2{,}5 \times 0{,}8^{10} + 12{,}5 \approx 12{,}23$

    donc la quantité de médicament présente dans le sang du patient au bout de 5 heures est d'environ 12,23 mg