Nom :
Prénom :

Exercice 1

f est la fonction définie sur IR par $f(x) = 8x - 10$.
Déterminer une primitive de la fonction f puis calculer $\int_{-2}^{6} f(x)dx$

Une primitive de f est F définie par $F(x) = 8 \times \frac{1}{2}x^2 - 10x = 4x^2 - 10x$

et

$I = \int_{-2}^{6} f(x)dx = F(6) - F(-2) = (4 \times 6^2 - 10 \times 6) - \left(4 \times (-2)^2 - 10 \times (-2)\right) = \mathbf{84 - 36 = 48}$

Exercice 2

Calculer la valeur exacte de I = $\int_1^3 (5t - \frac{5}{t})dt$ puis en donner une valeur approchée à 10^{-3} près.

$$\text{I} = \int_1^3 \left(5t - \frac{5}{t}\right) dt = \left[5 \times \frac{1}{2}t^2 - 5\ln(t)\right]_1^3$$

$$= \left(5 \times \frac{1}{2} \times 3^2 - 5\ln(3)\right) - \left(5 \times \frac{1}{2} \times 1^2 - 5\ln(1)\right)$$

$$= \frac{45}{2} - 5\ln(3) - \frac{5}{2}$$

$$= \mathbf{20 - 5\mathit{ln}(3)}$$

$$\approx \mathbf{14,507}$$

Exercice 3

On considère l'intégrale I $= \int_0^4 \frac{6x}{3x^2+3} dx$. Calculer I et montrer que I $= ln(17)$

$I = \int_0^4 f(x)\, dx$ avec $f(x) = \frac{6x}{3x^2+3}$ or f est de la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u(x) = 3x^2 + 3$ donc $u'(x) = 6x$
ainsi $f = \frac{u'}{u}$

donc une primitive de f est $F = \ln(u)$ soit $F(x) = \ln(3x^2 + 3)$

on a alors I $= \int_0^4 f(x)dx = F(4) - F(0)$

$$= \ln(3 \times 4^2 + 3) - \ln(3 \times 0^2 + 3)$$

$$= \ln(51) - \ln(3)$$

$$= \ln\left(\frac{51}{3}\right)$$

$$= \ln(17)$$

Exercice 4
Soit la fonction f définie sur [0 ; 5] par $f(x) = 12e^{3x}$
Déterminer la valeur moyenne de f entre 0 et 5.

Une primitive de $f(x) = 12e^{3x}$ est $F(x) = 12 \times \frac{1}{3} e^{3x} = 4e^{3x}$

La **valeur moyenne** de f sur $[0; 5]$ est alors :

$$m = \frac{1}{5-0} \int_0^5 f(x)dx = \frac{1}{5} \times \left[F(x) \right]_0^5$$

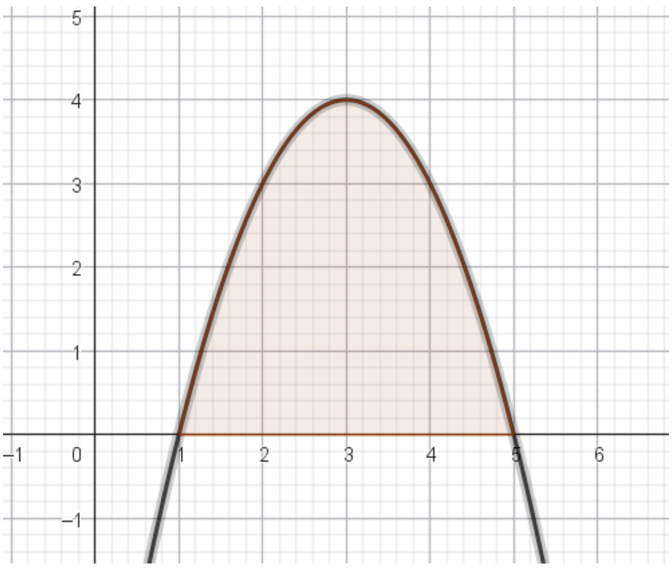
$$= \frac{1}{5} \times (F(5) - F(0))$$

$$= \frac{1}{5} \times (4e^{3\times 5} - 4e^{3\times 0})$$

$$= \frac{1}{5} \times (4e^{15} - 4)$$

$$= \frac{4e^{15}-4}{5} \approx \mathbf{2\ 615\ 213,1}$$

Exercice 5
Le graphique ci-contre représente la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 6x - 5$.
Calculer l'aire du domaine coloré ci-contre.



L'aire coloré A est délimité par la courbe C f , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 5$ donc $\mathbf{A} = \int_1^5 f(x)\, dx$

or une primitive de f est F définie par

$$F(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 5x$$

Ainsi $\mathbf{A} = \int_1^5 f(x)\, dx = F(5) - F(1)$

$$= \left(-\frac{1}{3} \times 5^3 + 3 \times 5^2 - 5 \times 5\right) - \left(-\frac{1}{3} \times 1^3 + 3 \times 1^2 - 5 \times 1\right)$$

$$= \frac{25}{3} - \left(-\frac{7}{3}\right)$$

$$= \frac{\mathbf{32}}{\mathbf{3}} \boldsymbol{u.a} \quad (\approx \mathbf{10,67}\ \boldsymbol{u.a})$$