❺ Avec le calcul des dérivées

Calculer la fonction dérivée pour chacune des fonctions définies par les expressions suivantes :

a) $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

$\boldsymbol{f'(x) = 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1}$

b) $f(x) = 5\sqrt{x} + x$

$f'(x) = 5 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} + 1 = \boldsymbol{\frac{5}{2\sqrt{x}} + 1}$

c) $f(x) = 4x + 2$

$\boldsymbol{f'(x) = 4}$

d) $f(t) = 2t^3 - 3t^2 + 4t - 5$

$f'(t) = 2 \times 3t^2 - 3 \times 2t + 4 = \boldsymbol{6t^2 - 6t + 4}$

e) $f(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^2}{4}$

$f'(x) = \frac{2}{3} \times 3x^2 + \frac{2x}{4} = \boldsymbol{2x^2 + \frac{x}{2}}$ $(= \boldsymbol{2x^2 + \frac{1}{2}x})$

f) $f(x) = (3 - x)(2x + 1)$

$= 6x + 3 - 2x^2 - x$

$= -2x^2 + 5x + 3$

$f'(x) = -2 \times 2x + 5 = \boldsymbol{-4x + 5}$

g) $f(x) = (3x + 5) \times e^x$ $\quad (forme\ u \times v)$

$f'(x) = 3e^x + (3x+5)e^x = e^x\,(3 + 3x + 5) = \boldsymbol{e^x\,(3x+8)}$

h) $f(x) = \frac{5x-1}{x+2}$ $\quad (forme\ \frac{u}{v})$

$f'(x) = \frac{5(x+2) - 1(5x-1)}{(x+2)^2} = \frac{5x+10-5x+1}{(x+2)^2} = \frac{11}{(x+2)^2}$

i) $f(x) = \frac{3x}{x^2 + 2}$ $\quad (forme\ \frac{u}{v})$

$f'(x) = \frac{3(x^2+2) - 2x \times 3x}{(x^2+2)^2} = \frac{3x^2+6-6x^2}{(x^2+2)^2} = \boldsymbol{\frac{-3x^2+6}{(x^2+2)^2}}$

j) $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$ $\quad (forme\ \frac{u}{v})$

$f'(x) = \frac{2x(x+1) - 1 \times x^2}{(x+1)^2} = \frac{2x^2+2x-x^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$

k) $f(x) = 5e^x - e^{-x}$

$f'(x) = 5e^x - \frac{-e^x}{(e^x)^2} = 5e^x + \frac{1}{e^x} = \boldsymbol{5e^x + e^{-x}}$

l) $f(x) = \frac{x}{e^x}$ $\quad (forme\ \frac{u}{v})$

$f'(x) = \frac{1 \times e^x - e^x \times x}{(e^x)^2} = \frac{e^x - xe^x}{(e^x)^2} = \frac{e^x(1-x)}{(e^x)^2} = \frac{1-x}{e^x}$

m) $f(x) = \frac{1}{2x^2+5x+7}$ $\quad (forme\ \frac{1}{u})$

$\boldsymbol{f'(x) = -\frac{4x+5}{(2x^2+5x+7)^2}}$

n) $f(x) = 4x + 2 + \frac{1}{2x+3}$

$\boldsymbol{f'(x) = 4 - \frac{2}{(2x+3)^2}}$

❻ Avec les fonctions dérivées

Pour chacune des fonctions suivantes, étudier les variations puis établir le tableau de variation sur l'intervalle indiqué

a/ $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 5x + 7 \quad sur \ [-2\,;5\,]$ corrigé en classe

b/ $f(x) = 4e^x - 4x \quad sur \ [-2\,;3\,]$ corrigé en classe

c/ $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 5 \quad sur \ [-1\,;3\,]$ corrigé en classe

d/ $f(x) = \frac{2x+1}{x-2} \quad sur \ [-5\,;1\,]$ corrigé en classe

e/ $f(x) = \frac{12x^2-12x+13}{4x^2-4x+4} \quad sur \ [-2\,;2\,]$

$$\boldsymbol{f'(x)} = \frac{(24x-12)(4x^2-4x+4) - (12x^2-12x+13)\times(8x-4)}{(4x^2-4x+4)^2}$$

$$= \frac{96x^3 - 96x^2 + 96x - 48x^2 + 48x - 48 - (96x^3 - 48x^2 - 96x^2 + 48x + 104x - 52)}{(4x^2-4x+4)^2}$$

$$= \frac{96x^3 - 96x^2 + 96x - 48x^2 + 48x - 48 - 96x^3 + 48x^2 + 96x^2 - 48x - 104x + 52}{(4x^2-4x+4)^2}$$

$$= \frac{-8x+4}{(4x^2-4x+4)^2}$$

x	-2		$0,5$		2
$-8x+4$		$+$	0	$-$	
$(4x^2-4x+4)^2$			$+$		
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\frac{85}{28}$	↗	$\frac{10}{3}$	↘	$\frac{37}{12}$

$a = -8 < 0$ et

$-8x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-4}{-8} = 0,5$

f/ $f(x) = \frac{3x^2+2x-4}{x-2}$ sur [2,5 ; 6]

$$f'(\boldsymbol{x}) = \frac{(6x+2)(x-2)-(3x^2+2x-4)\times 1}{(x-2)^2} = \frac{6x^2-12x+2x-4-3x^2-2x+4}{(x-2)^2} = \frac{3x^2-12x}{(x-2)^2}$$

Pour determiner les racines de $3x^2 - 12x$*, on peut calculer le discriminant (avec a= 3, b = -12 et c= 0)*

ou on peut factoriser ce qui donne $3x^2 - 12x = x(3x - 12)$.

Ainsi on a soit $x = 0$, *soit* $3x - 12 = 0$ *d'où* $3x = 12$ *et* $x = 4$.

On retrouve alors que les racines de $3x^2 - 12x$ *sont* 0 *et* 4 *(mais 0 n'appartient pas à* [2,5 ; 6] *)*

x	2,5		4		6
$3x^2 - 12x$		$-$	0	$+$	
$(x-2)^2$			$+$		
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	39,5	↘	26	↗	29