Terminales Maths Complémentaires	interrogation n° 3	/12/2023

Nom :
Prénom :

Exercice 1
On estime que 15 % des élèves français sont gauchers. On considère une classe de 28 élèves et on note X la variable aléatoire associée au nombre d'élèves gauchers dans cette classe.

a) Quelle est la loi suivie par X ?

1) X suit la loi binomiale de paramètres $n = 28$ et $p = 0{,}15$

b) Calculer la probabilité qu'il y ait exactement 5 élèves gauchers dans cette classe. (arrondir au millième)

2) $p(X=5) = \binom{28}{5} \times 0{,}15^5 \times (1-0{,}15)^{23} \approx 0{,}177$

c) Calculer la probabilité qu'il y ait au moins 4 élèves gauchers dans cette classe. (arrondir au millième)

2,5) $p(X \geq 4) = 1 - p(X < 4)$
$= 1 - p(X \leq 3)$
$\approx 1 - 0{,}377$
$\approx 0{,}623$

d) Le professeur de mathématiques de cette classe estime qu'il y a plus de 99 % de chances qu'il y ait au moins un élève gaucher dans cette classe. A-t-il raison ?

3) $p(X \geq 1) = 1 - p(X=0)$
$= 1 - \binom{28}{0} \times 0{,}15^0 \times (1-0{,}15)^{28}$
$= 1 - 0{,}85^{28}$
$\approx 1 - 0{,}01056$
$\approx 0{,}9894 < 0{,}99$ donc le professeur a tort.

e) Quel est, en moyenne, le nombre d'élèves gauchers dans une classe de 28 élèves ?

1,5) $E(X) = np = 28 \times 0{,}15 = 4{,}2$ donc 4 élèves gauchers en moyenne par classe

Exercice 2

Une loterie comporte un grand nombre de billets parmi lesquels 20 % sont gagnants. Un joueur décide d'acheter des billets jusqu'à ce qu'il obtienne un 1er billet gagnant.
On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de billets achetés pour avoir un 1er billet gagnant.

a) Quelle est la loi suivie par X ?

(1) X suit la loi géométrique de paramètre $p = 0,2$

b) En moyenne, combien un joueur doit-il acheter de billets avant d'avoir un 1er billet gagnant ?

(2) $E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0,2} = 5$ donc 5 billets en moyenne

c) Calculer la probabilité d'obtenir le 1er billet gagnant à l'achat du 5ème billet.

(2) $p(X=5) = 0,2 \times (1-0,2)^4 = 0,2 \times 0,8^4 = 0,08192$

d) Un joueur ne peut acheter que 6 billets au maximum. Calculer la probabilité que ce joueur ait un 1er billet gagnant en un maximum de 6 achats.

(2,5)

$$p(X \leq 6) = p(X=1) + p(X=2) + p(X=3) + p(X=4) + p(X=5) + p(X=6)$$

$$= 0,2 + 0,2\times0,8 + 0,2\times0,8^2 + 0,2\times0,8^3 + 0,2\times0,8^4 + 0,2\times0,8^5$$

$$= 0,2 + 0,16 + 0,128 + 0,1024 + 0,08192 + 0,065536$$

$$\approx 0,738$$

e) Calculer la probabilité de devoir acheter plus de 10 billets (strictement) pour avoir un 1er billet gagnant sachant que l'on n'a toujours pas de billets gagnants après l'achat de 7 billets.

(2,5)

$$p_{X>7}(X>10) = p_{X>7}(X>7+3)$$

$$= p(X>3)$$

$$= 1 - p(X \leq 3)$$

$$= 1 - \left(p(X=1) + p(X=2) + p(X=3)\right)$$

$$= 1 - (0,2 + 0,16 + 0,128)$$

$$= 1 - 0,488$$

$$= 0,512$$