MATHS Complémentaires	interrogation n° 2	le 21/11/2023

Nom :
Prénom :

Exercice 1
Un laboratoire pharmaceutique vient d'élaborer un nouveau test anti-dopage.

Une étude sur ce nouveau test donne les résultats suivants :

- si un athlète est dopé, la probabilité que le résultat du test soit positif est 0,98 (sensibilité du test) ;
- si un athlète n'est pas dopé, la probabilité que le résultat du test soit négatif est 0,995 (spécificité du test).

On fait subir le test à un athlète sélectionné au hasard au sein des participants à une compétition d'athlétisme.
On note D l'évènement « l'athlète est dopé » et T l'évènement « le test est positif ».
On admet que la probabilité de l'évènement D est égale à 0,08.

a) Traduire chaque donnée de l'énoncé par une probabilité.
b) Montrer que la probabilité que le test soit positif est égale à 0,083 (on pourra s'aider d'un arbre de probabilités)
c) Sachant qu'un athlète présente un test positif, quelle est la probabilité qu'il soit dopé ?
d) Le laboratoire décide de commercialiser le test si la probabilité de l'évènement « un athlète présentant un test négatif n'est pas dopé » est supérieure ou égale à 0,998.
Le test proposé par le laboratoire sera-t-il commercialisé ?

a) $p_D(T) = 0{,}98$ $\quad p_{\overline{D}}(\overline{T}) = 0{,}995$ $\quad p(D) = 0{,}08$

b) D et $\overline{D}$ forment une partition de l'univers et d'après la formule des probabilités totales

$$P(T) = p(D \cap T) + p(\overline{D} \cap T) = 0{,}08 \times 0{,}98 + 0{,}92 \times 0{,}005 = 0{,}0784 + 0{,}0046 = 0{,}083$$

c) La probabilité recherchée est $p_T(D) = \frac{p(D \cap T)}{p(T)} = \frac{0{,}0784}{0{,}083} \approx 0{,}945$

d) Il faut calculer $p_{\overline{T}}(\overline{D}) = \frac{p(\overline{D} \cap \overline{T})}{p(\overline{T})}$

or $p(\overline{D} \cap \overline{T}) = 0{,}92 \times 0{,}995 = 0{,}9154$ et $p(\overline{T}) = 1 - p(T) = 1 - 0{,}083 = 0{,}917$

ainsi $p_{\overline{T}}(\overline{D}) = \frac{p(\overline{D} \cap \overline{T})}{p(\overline{T})} = \frac{0{,}9154}{0{,}917} \approx 0{,}9982 > 0{,}998$ donc le test sera commercialisé

Exercice 2

Une télévendeuse prospecte des clients par téléphone.
On considère que 15 % des clients contactés sont intéressés par l'offre proposée par la télévendeuse. La télévendeuse contacte 20 clients au hasard et le comportement d'un client est indépendant de celui des autres clients.
X est la variable aléatoire associée au nombre de clients intéressés par l'offre proposée.

1/ On admet que X suit une loi binomiale. Donner les paramètres de cette loi.

X suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0{,}15$

2/ Calculer, à 10^{-3} près, la probabilité qu'exactement 4 clients soient intéressés par l'offre proposée.

$p\,(X = 4) = \binom{20}{4} \times 0{,}15^4 \times (1 - 0{,}15)^{16} \approx 0{,}182$

3/ Calculer, à 10^{-3} près, la probabilité qu'au moins deux clients soient intéressés par l'offre proposée.

$p\,(X \geq 2) = 1 - p\,(X \leq 1) \approx 1 - 0{,}176 \approx 0{,}824$

remarque : $p\,(X = 0) = \binom{20}{0} \times 0{,}15^0 \times (1 - 0{,}15)^{20} \approx 0{,}039$

$p\,(X = 1) = \binom{20}{1} \times 0{,}15^1 \times (1 - 0{,}15)^{19} \approx 0{,}137$

d'où $P\,(X \leq 1) = P\,(X = 0) + p\,(X = 1) \approx 0{,}039 + 0.137 \approx 0{,}176$

4/ Calculer E(X). Interpréter le résultat.

$E(X) = n \times p = 20 \times 0{,}15 = 3$

Sur un grand nombre de groupes de 20 clients, il y a en moyenne 3 clients intéressés par l'offre proposée