

fiche AP Maths : Espace et repérage

(ex1) $\vec{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\vec{BC} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{AD} = 2\vec{BC}$ donc $\vec{AD}$ et $\vec{BC}$ sont colinéaires
donc (AD) et (BC) sont parallèles

(ex2) $\vec{AB} \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\vec{AC} \begin{pmatrix} -12 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\vec{AC} = 2\vec{AB}$ donc $\vec{AC}$ et $\vec{AB}$ sont colinéaires
donc A, B, C sont alignés

(remarque : on peut aussi utiliser $\vec{BC} \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ d'où $\vec{AB} = \vec{BC}$)

(ex3) 1) $\vec{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{AC} \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\frac{2}{-3} \neq \frac{0}{-2}$ donc $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires
donc A, B, C ne sont pas alignés

2) a) $\vec{AD} \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ d'où $2\vec{AB} - \vec{AC} - \vec{AD}$ a pour coordonnées

$$2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - (-3) - 7 \\ 0 - (-2) - 2 \\ 2 - 2 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) on a alors $2\vec{AB} - \vec{AC} - \vec{AD} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{AD} = 2\vec{AB} - \vec{AC}$
donc $D \in (ABC)$

(ex4) 1) $\vec{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\vec{AC} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ or $\frac{0}{4} \neq \frac{-2}{-2}$ donc $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires donc A, B, C ne sont pas alignés et définissent un plan

2) $\vec{DE} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\vec{DE}$, $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont coplanaires si il existe α et β tels que

$$\vec{DE} = \alpha \vec{AB} + \beta \vec{AC}$$

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 = 4\alpha \\ 3 = -2\alpha - 2\beta \\ -3 = 4\alpha + \beta \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -\frac{2}{4} = -0,5 \\ 3 = -2 \times (-0,5) - 2\beta \\ -3 = 4 \times (-0,5) + \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -0,5 \\ 3 = 1 - 2\beta \\ -3 = -2 + \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -0,5 \\ 2\beta = 1 - 3 \\ -3 + 2 = \beta \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -0,5 \\ 2\beta = -2 \\ -1 = \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -0,5 \\ \beta = -\frac{2}{2} \\ \beta = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -0,5 \\ \beta = -1 \\ \beta = -1 \end{cases}$$

alors $\vec{DE} = -0,5 \vec{AB} - \vec{AC}$ donc les vecteurs $\vec{DE}$, $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont coplanaires

(Ex 5) 1) $\vec{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \vec{AC} \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \vec{DE} \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}$

2) a) $\vec{DE} = x \vec{AB} + y \vec{AC}$

$$\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 = -x - 2y \\ -2 = -2y \\ 8 = 5x - 2y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4 = -x - 2y \\ -2 = -2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 = -x - 2 \times 1 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 = -x - 2 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 + 4 = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

et puisque $5x - 2y = 5 \times 2 - 2 \times 1 = 8$ alors la dernière équation est vérifiée

d'où $\vec{DE} = 2\vec{AB} + \vec{AC}$

b) on en déduit que $\vec{DE}$, $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont coplanaires

or $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires donc A, B, C définissent un plan

et si $\vec{DE}$, $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont coplanaires alors la droite (DE) est soit parallèle au plan (ABC), soit contenue dans le plan (ABC)

Ex 6) Dans le repère $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$ on a

$$A(0;0;0) \quad B(1;0;0) \quad C(1;1;0) \quad D(0;1;0) \quad E(0;0;1) \quad F(1;0;1) \quad G(1;1;1) \quad H(0;1;1)$$

1) a) I milieu de $[AE]$ donc $I\left(\frac{0+0}{2}; \frac{0+0}{2}; \frac{0+1}{2}\right) \quad I\left(0;0;\frac{1}{2}\right)$

J milieu de $[CH]$ donc $J\left(\frac{1+0}{2}; \frac{1+1}{2}; \frac{0+1}{2}\right) \quad J\left(\frac{1}{2}; 1; \frac{1}{2}\right)$

b) cette question sera abordée ultérieurement

2. a) $\vec{EP} = \frac{1}{3} \vec{EH}$

$$\begin{pmatrix} x_P - 0 \\ y_P - 0 \\ z_P - 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x_P = \frac{1}{3} \times 0 = 0 \\ y_P = \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{3} \\ z_P - 1 = \frac{1}{3} \times 0 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x_P = 0 \\ y_P = \frac{1}{3} \\ z_P = 1 \end{cases} \quad P\left(0; \frac{1}{3}; 1\right)$$

$$\vec{AQ} = \frac{1}{3} \vec{AC}$$

$$\begin{pmatrix} x_Q - 0 \\ y_Q - 0 \\ z_Q - 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x_Q = \frac{1}{3} \\ y_Q = \frac{1}{3} \\ z_Q = 0 \end{cases} \quad Q\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; 0\right)$$

K milieu de $[PQ]$ donc $K\left(\frac{0+\frac{1}{3}}{2}; \frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}{2}; \frac{1+0}{2}\right) \quad K\left(\frac{1}{6}; \frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)$

b) $\vec{IK} \begin{pmatrix} \frac{1}{6} - 0 \\ \frac{1}{3} - 0 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \vec{IK} \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{IJ} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3 \quad \text{donc} \quad \vec{IJ} = 3 \vec{IK} \quad \text{donc} \quad \vec{IJ} \text{ et } \vec{IK} \text{ sont colinéaires}$$

donc I, J, K sont alignés.