Exercice 3 : limites de q^n

Déterminer les limites des suites suivantes :

a/ $u_n = 3 \times 0{,}4^n$ $\quad -1 < 0{,}4 < 1 \quad donc \quad \lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}4^n = 0 \quad d'où \quad \lim\limits_{n\to+\infty} 3 \times 0{,}4^n = 0$

b/ $u_n = 10 - 8 \times 1{,}2^n$ $\quad 1{,}2 > 1 \quad donc \quad \lim\limits_{n\to+\infty} 1{,}2^n = +\infty \quad d'où \quad \lim\limits_{n\to+\infty} -8 \times 1{,}2^n = -\infty \quad et \quad \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

c/ $u_n = 5 \times \left(1 + \left(\sqrt{3}\right)^n\right)$ $\quad \sqrt{3} > 1 \quad donc \quad \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{3}\right)^n = +\infty \quad d'où \quad \lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \left(\sqrt{3}\right)^n = +\infty \quad et \quad \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

d/ $u_n = \dfrac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}} = \dfrac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{\frac{2}{3}} = \dfrac{3}{2} \times \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$

$-1 < \frac{1}{3} < 1 \quad donc \quad \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0 \quad d'où \quad \lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n = 1$ ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) = \frac{3}{2}$

e/ $u_n = \dfrac{5}{2 \times 0{,}9^n}$ $\quad -1 < 0{,}9 < 1 \quad donc \quad \lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}9^n = 0 \quad d'où \quad \lim\limits_{n\to+\infty} 2 \times 0{,}9^n = 0^+ \quad (car\ 2 \times 0{,}9^n > 0)$

ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5}{2 \times 0{,}9^n} = +\infty$

f/ $u_n = 1{,}5 \times \left(\frac{3}{7}\right)^n + \frac{4}{7}$ $\quad -1 < \frac{3}{7} < 1 \quad donc \quad \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{7}\right)^n = 0 \quad d'où \quad \lim\limits_{n\to+\infty} 1{,}5 \times \left(\frac{3}{7}\right)^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{4}{7}$

Exercice 4 : études de suite

1er cas :

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 8$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = 3u_n - 12$

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - 6$.

a/ Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le 1er terme.
b/ En déduire l'expression de v_n puis celle de u_n en fonction de n.
c/ Déterminer la limite de la suite (u_n).

2ème cas :

On considère la suite définie par $u_{n+1} = 0{,}5u_n + 2 \quad et \quad u_0 = 5$

a/ Démontrer par récurrence que pour tout entier n, $u_n \geq 4$
b/ Déterminer le sens de variation de la suite (u_n)
c/ Justifier que la suite (u_n) converge.
d/ Déterminer la limite ℓ de la suite (u_n).