Exercice 4 : études de suite

1er cas :

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 8$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = 3u_n - 12$

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - 6$.

a/ Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le 1er terme.

$v_n = u_n - 6$ donc $u_n = v_n + 6$

Si $v_n = u_n - 6$ *alors*

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 6$$

$$= 3u_n - 12 - 6$$

$$= 3u_n - 18$$

$$= 3(v_n + 6) - 18 \quad \text{car } u_n = v_n + 6$$

$$= 3v_n + 18 - 18$$

$$= 3v_n$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison q $= 3$ et de 1er terme $v_0 = u_0 - 6 = 8 - 6 = 2$

b/ En déduire l'expression de v_n puis celle de u_n en fonction de n.

Puisque (v_n) est une suite géométrique de raison q $= 3$ et de 1er terme $v_0 = 2$

alors $v_n = v_0 \times q^n = 2 \times 3^n$

or $u_n = v_n + 6$

donc $u_n = 2 \times 3^n + 6$

c/ Déterminer la limite de la suite (u_n).

$u_n = 2 \times 3^n + 6$ *or* $3 > 1$ *donc* $\lim_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$

d'où $\lim_{n\to+\infty} 2 \times 3^n = +\infty$ *et* $\lim_{n\to+\infty} 2 \times 3^n + 6 = +\infty$ *ainsi* $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

2ème cas :

On considère la suite définie par $u_{n+1} = 0{,}5u_n + 2$ *et* $u_0 = 5$

a/ Démontrer par récurrence que pour tout entier n, $u_n \geq 4$

Initialisation :

Pour n = 0 on a $u_0 = 5 \geq 4$ *donc la propriété est vraie au rang 0.*

Hérédité :

On suppose qu'il existe un rang k ≥ 0 tel que $u_k \geq 4$

et on cherche alors à démontrer que la propriété est vraie au rang k+1, c'est-à-dire $u_{k+1} \geq 4$

or si $u_k \geq 4$

$\Leftrightarrow$ $0{,}5\, u_k \geq 0{,}5 \times 4$

$\Leftrightarrow$ $0{,}5\, u_k + 2 \geq 2 + 2$

$\Leftrightarrow$ $u_{k+1} \geq 4$ *Donc l'hérédité est démontrée*

Conclusion :

la propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire

Donc, pour tout entier $n \geq 1$, $u_n \geq 4$

b/ Déterminer le sens de variation de la suite (u_n)

Pour tout entier n , $u_{n+1} - u_n = 0{,}5u_n + 2 - u_n = -0{,}5u_n + 2$

or $u_n \geq 4$

donc $-0{,}5u_n \leq -2$

et $-0{,}5u_n + 2 \leq 0$

Ainsi $u_{n+1} - u_n \leq 0$ donc (u_n) est décroissante.

c/ Justifier que la suite (u_n) converge.

La suite (u_n) est décroissante et minorée (par 4) donc elle converge.

d/ Déterminer la limite ℓ de la suite (u_n).

$u_{n+1} = 0{,}5u_n + 2$ donc $u_{n+1} = f\,(u_n)$ avec $f(x) = 0{,}5x + 2$

Or (u_n) converge et la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ donc d'après le théorème du point fixe, la limite ℓ de la suite (u_n) est solution de l'équation $\ell = f(\,\ell\,)$

$\Leftrightarrow \ell = 0{,}5\,\ell + 2$

$\Leftrightarrow \ell - 0{,}5\,\ell = 2$

$\Leftrightarrow 0{,}5\,\ell = 2$

$\Leftrightarrow \ell = \dfrac{0{,}5}{2}$

$\Leftrightarrow \ell = 4$ ainsi $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 4$