

Exercice 1 Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 - 5n^2 + 2$: FI du type « $\infty - \infty$ » mais pour $n \neq 0$, $n^3 - 5n^2 + 2 = n^3 \left(1 - \frac{5}{n} + \frac{2}{n^3}\right)$

or $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{5}{n} + \frac{2}{n^3}\right) = 1$ donc par produit, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 \left(1 - \frac{5}{n} + \frac{2}{n^3}\right) = +\infty$

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (3n + 2)(1 - n)$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} (3n + 2) = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - n) = -\infty$ donc par produit $\lim_{n \rightarrow +\infty} (3n + 2)(1 - n) = -\infty$

c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}$: FI du type « $\frac{\infty}{\infty}$ » mais pour $n \neq 0$, $\frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} = \frac{n^2 \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)}{n^2 \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)} = \frac{1 - \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}}$

or $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{n^2} = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{n^2} = 1$ donc par quotient, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}} = 1$

d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5}{2\sqrt{n} - 1}$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} 5 = 5$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2\sqrt{n} - 1 = +\infty$ donc par quotient $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5}{2\sqrt{n} - 1} = 0$

e) $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2n^3 + 3n - 1$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2n^3 = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3n - 1 = +\infty$ donc par somme $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2n^3 + 3n - 1 = +\infty$

f) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 - 2n}{n + 3}$: FI du type « $\frac{\infty}{\infty}$ » mais pour $n \neq 0$, $\frac{n^2 - 2n}{n + 3} = \frac{n^2 \left(1 - \frac{2}{n}\right)}{n \left(1 + \frac{3}{n}\right)} = \frac{n \left(1 - \frac{2}{n}\right)}{1 + \frac{3}{n}}$

or $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{2}{n} = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{3}{n} = 1$ donc par quotient, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n \left(1 - \frac{2}{n}\right)}{1 + \frac{3}{n}} = +\infty$

g) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (5n - 1) \left(3 + \frac{1}{n}\right)$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} (5n - 1) = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(3 + \frac{1}{n}\right) = 3$ donc par produit $\lim_{n \rightarrow +\infty} (5n - 1) \left(3 + \frac{1}{n}\right) = +\infty$

h) $\lim_{n \rightarrow +\infty} -2n^2 + 10n$: FI du type « $\infty - \infty$ » mais pour $n \neq 0$, $-2n^2 + 10n = n^2 \left(-2 + \frac{10}{n}\right)$

or $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-2 + \frac{10}{n}\right) = -2$ donc par produit, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left(-2 + \frac{10}{n}\right) = -\infty$

i) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n+1}{n^2+n}$: FI du type « $\frac{\infty}{\infty}$ » mais pour $n \neq 0$, $\frac{3n+1}{n^2+n} = \frac{n(3 + \frac{1}{n})}{n^2(1 + \frac{1}{n})} = \frac{(3 + \frac{1}{n})}{n(1 + \frac{1}{n})}$

or $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3 + \frac{1}{n} = 3$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$ donc par quotient, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(3 + \frac{1}{n})}{n(1 + \frac{1}{n})} = 0$

j) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n}{3n+5}$ FI du type « $\frac{\infty}{\infty}$ » mais pour $n \neq 0$, $\frac{2n}{3n+5} = \frac{2n}{n(3 + \frac{5}{n})} = \frac{2}{3 + \frac{5}{n}}$

or $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2 = 2$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3 + \frac{5}{n} = 3$ donc par quotient, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{3 + \frac{5}{n}} = \frac{2}{3}$

k) $\lim_{n \rightarrow +\infty} 6 - \frac{2}{n+3}$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} n + 3 = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{2}{n+3} = 0$ ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} 6 - \frac{2}{n+3} = 6$

l) $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2n - \sqrt{n}$: FI du type « $\infty - \infty$ » mais pour $n \neq 0$, $2n - \sqrt{n} = n(2 - \frac{\sqrt{n}}{n}) = n(2 - \frac{1}{\sqrt{n}})$ (car $n = \sqrt{n} \times \sqrt{n}$)

or $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2 - \frac{1}{\sqrt{n}}) = 2$ donc par produit, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(2 - \frac{1}{\sqrt{n}}) = +\infty$

m) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{6n^2+3n+5}{2n^2-5n+1}$: FI du type « $\frac{\infty}{\infty}$ » mais pour $n \neq 0$, $\frac{6n^2+3n+5}{2n^2-5n+1} = \frac{n^2(6 + \frac{3}{n} + \frac{5}{n^2})}{n^2(2 - \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2})} = \frac{6 + \frac{3}{n} + \frac{5}{n^2}}{2 - \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2}}$

or $\lim_{n \rightarrow +\infty} 6 + \frac{3}{n} + \frac{5}{n^2} = 6$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2 - \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2} = 2$ donc par quotient, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{6 + \frac{3}{n} + \frac{5}{n^2}}{2 - \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2}} = \frac{6}{2} = 3$

n) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{\sqrt{n}} - 5n$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{\sqrt{n}} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} -5n = -\infty$ donc par somme, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{\sqrt{n}} - 5n = -\infty$

o) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^3+3}{5n^4-8n^2+n}$: FI du type « $\frac{\infty}{\infty}$ » mais pour $n \neq 0$, $\frac{2n^3+3}{5n^4-8n^2+n} = \frac{n^3(2 + \frac{3}{n^3})}{n^4(5 - \frac{8}{n^2} + \frac{1}{n^3})} = \frac{2 + \frac{3}{n^3}}{n(5 - \frac{8}{n^2} + \frac{1}{n^3})}$

or $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2 + \frac{3}{n^3} = 2$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 5 - \frac{8}{n^2} + \frac{1}{n^3} = 5$ donc par quotient, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{3}{n^3}}{n(5 - \frac{8}{n^2} + \frac{1}{n^3})} = 0$