Exercice 2

En utilisant le théorème de comparaison ou des gendarmes, déterminer la limite des suites de terme général u_n suivantes :

a) $u_n = \frac{\sin(n)}{n}$

on sait que pour tout entier n $\quad -1 \leq \sin(n) \leq 1$

donc (en divisant par n, on obtient) $-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin(n)}{n} \leq \frac{1}{n}$

ainsi $\quad -\frac{1}{n} \leq u_n \leq \frac{1}{n}$

or $\quad \lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{n} = 0 \quad et \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$

donc d'après le **théorème des gendarmes**, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

b) $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$

on sait que pour tout entier n $\quad -1 \leq (-1)^n \leq 1$

donc (en divisant par n, on obtient) $-\frac{1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n}$

ainsi $\quad -\frac{1}{n} \leq u_n \leq \frac{1}{n}$

or $\quad \lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{n} = 0 \quad et \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$

donc d'après le **théorème des gendarmes**, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

c) $u_n = n^2 + n\times(-1)^n$

on sait que pour tout entier n $\quad -1 \leq (-1)^n \leq 1$

donc (en multipliant par n, on obtient) $-n \leq n(-1)^n \leq n$

et (en ajoutant n^2) $\quad n^2 - n \leq n^2 + n(-1)^n \leq n^2 + n$

ainsi $\quad n^2 - n \leq u_n \leq n^2 + n$

on a donc $\quad u_n \geq n^2 - n$

Or $\lim_{n\to+\infty} n^2 - n = \lim_{n\to+\infty} n^2\left(1 - \frac{1}{n}\right) = +\infty$ donc **par comparaison**, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

d) $u_n = -n + sin(n)$

on sait que pour tout entier n $\quad -1 \leq \sin(n) \leq 1$

donc (en ajoutant $-n$, on obtient) $\quad -n-1 \leq -n+\sin(n) \leq -n+1$

ainsi $\quad -n-1 \leq u_n \leq -n+1$

on a donc $\quad u_n \leq -n+1$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} -n+1 = -\infty$ donc **par comparaison**, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

*(c'est un cas particulier car ici, (u_n) est **inférieure** à une suite qui a pour limite - ∞ donc (u_n) a aussi pour limite - ∞)*

e) $u_n = n + 3\times(-1)^n$

on sait que pour tout entier n $\quad -1 \leq (-1)^n \leq 1$

donc (en multipliant par 3, on obtient) $\quad -3 \leq 3\times(-1)^n \leq 3$

et (en ajoutant n) $\quad n-3 \leq n+3\times(-1)^n \leq n+3$

ainsi $\quad n-3 \leq u_n \leq n+3$

on a donc $\quad u_n \geq n-3$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} n-3 = +\infty$ donc **par comparaison**, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$