Application : corrigé

Suite à un accident industriel, un gaz se répand dans un local d'usine. On admet qu'au-delà de six minutes, il n'y a quasiment plus de gaz dans l'air.
On modélise l'évolution du taux de gaz dans l'air par la fonction f définie sur [0 ;6] par f $(x) = 2xe^{-x}$ où x est le nombre de minutes écoulées depuis l'accident et f (x) le taux de gaz dans l'air exprimé en ppm (partie par million).

a/ Déterminer les réels a et b pour que la fonction F définie sur [0 ;6] par
F$(x) = (ax + b)e^{-x}$ soit une primitive de f sur [0 ;6]

F est une primitive de f si $F'(x) = f(x)$ or $F = uv$ avec $u(x) = ax + b$ et $v(x) = e^{-x}$
$u'(x) = a$ et $v'(x) = -e^{-x}$

Alors $F'(x) = ae^{-x} - e^{-x}(ax + b) = (a - ax - b)e^{-x} = (-ax + a - b)e^{-x}$ or $f(x) = 2xe^{-x}$

Ainsi, par identification des coefficients, $F'(x) = f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} -a = 2 \\ a - b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -2 \end{cases}$

D'où F définie par $\boldsymbol{F(x) = (-2x - 2)e^{-x}}$ est une primitive de f sur $[0\,;6]$

b/ On considère que le gaz a un effet irritant pour l'organisme si le taux moyen de gaz dans l'air pendant les 4 premières minutes est supérieur à 0,5 ppm.
Calculer la valeur moyenne de f sur [0 ;4] et en déduire si le personnel de l'usine a été affecté ou non par la fuite de gaz.

$$\mu = \frac{1}{4-0}\int_0^4 f(x)dx = \frac{1}{4}\,[F(x)]_0^4 = \frac{1}{4}\left((-2 \times 4 - 2)e^{-4} - (-2 \times 0 - 2)e^{0}\right) = \frac{1}{4}(-10e^{-4} + 2) \approx \mathbf{0,454}$$

Ainsi $\boldsymbol{\mu} < \mathbf{0,5}$ **donc le personnel n'a pas été affecté par la fuite de gaz.**