Corrigé AP produit scalaire

Exercice 2 :

1) Les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-6\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires car $\frac{2}{1} \neq \frac{2}{-6} \neq \frac{1}{3}$ donc les points A, B et C ne sont pas alignés et ils définissent un plan.

2) un vecteur directeur de la droite (AB) est $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-6\\3\end{pmatrix}$

un vecteur directeur de la droite (DE) est $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}-12\\5\\14\end{pmatrix}$

or $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DE} = xx' + yy' + zz' = 1 \times (-12) + (-6) \times 5 + 3 \times 14 = 0$

ainsi $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DE}$ sont orthogonaux donc les droites (AB) et (DE) sont orthogonales.

3) $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$ ainsi $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DE} = 2 \times (-12) + 2 \times 5 + 1 \times 14 = 0$

donc (AC) et (DE) sont orthogonales.

On a donc la droite (DE) qui est orthogonale aux 2 droites (AB) et (AC), sécantes en A dans le plan (ABC) ce qui prouve que la droite (DE) est orthogonale au plan (ABC).

Exercice 3 :

un vecteur directeur de la droite (AB) est $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\4\\-2\end{pmatrix}$ et un vecteur directeur de la droite (CD) est $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-6\\4\\-1\end{pmatrix}$

or $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = xx' + yy' + zz' = 3 \times (-6) + 4 \times 4 + (-2) \times (-1) = 0$ ainsi $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux donc les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.

Exercice 4 :

un vecteur directeur de la droite (MN) est $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}9\\3\\2\end{pmatrix}$ et un vecteur directeur de la droite (RS) est $\overrightarrow{RS}\begin{pmatrix}1\\-3\\0\end{pmatrix}$

or $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{RS} = xx' + yy' + zz' = 9 \times 1 + 3 \times (-3) + 2 \times 0 = 0$ ainsi $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{RS}$ sont orthogonaux donc les droites (MN) et (RS) sont orthogonales.

Exercice 5 :

1) Les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires car $\frac{1}{2} \neq \frac{0}{-1} \neq \frac{-1}{-1}$ donc les points A, B et C ne sont pas alignés et ils définissent un plan.

2) un vecteur directeur de la droite (DE) est $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}4\\4\\4\end{pmatrix}$

or $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DE} = xx' + yy' + zz' = 2 \times 4 + (-1) \times 4 + (-1) \times 4 = 0$

et $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DE} = 1 \times 4 + 0 \times 4 + (-1) \times 4 = 0$

On a donc la droite (DE) qui est orthogonale aux 2 droites (AB) et (AC), sécantes en A dans le plan (ABC) ce qui prouve que la droite (DE) est orthogonale au plan (ABC).

Exercice 6 :

1) Les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-6\\4\\-2\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires car $\frac{-6}{-1} \neq \frac{4}{3} \neq \frac{-2}{2}$ donc les points A, B et C ne sont pas alignés et ils définissent un plan.

2) Pour $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$, on a

or $\overrightarrow{AB}.\vec{n} = (-1)\times 1 + 3\times 1 + 2\times(-1) = 0$

et $\overrightarrow{AC}.\vec{n} = (-6)\times 1 + 4\times 1 + (-2)\times(-1) = 0$

ainsi $\overrightarrow{AB}.\vec{n} = 0$ **et** $\overrightarrow{AC}.\vec{n} = 0$ donc $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC)

Exercice 7 :

1) On a $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}-11\\2\\-4\end{pmatrix}$ or $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\3\\-4\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$

Ainsi, puisque $\overrightarrow{AH}.\vec{n} = (-11)\times 2 + 2\times 3 + (-4)\times(-4) = 0$

On en déduit que le point H appartient au plan $\mathcal{P}$ passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$

2) a. on a $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}-8\\-12\\16\end{pmatrix}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\3\\-4\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{BH} = -4\times\vec{n}$ donc $\overrightarrow{BH}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires

or $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$, donc $\overrightarrow{BH}$ est aussi un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$, donc (BH) est orthogonale au plan $\mathcal{P}$
Ainsi, puisque H appartient au plan $\mathcal{P}$, alors H est le projeté orthogonal de B sur le plan $\mathcal{P}$

b. Comme H est le projeté orthogonal de B sur le plan $\mathcal{P}$, la distance du point B au plan $\mathcal{P}$ est BH

$$\begin{aligned}BH &= \sqrt{(x_H-x_B)^2+(y_H-y_B)^2+(z_H-z_B)^2} = \sqrt{(-9-(-1))^2+(5-17)^2+\left(-1-(-17)\right)^2}\\ &= \sqrt{(-8)^2+(-12)^2+16^2}\\ &= \sqrt{464}\\ &\approx 21{,}54\end{aligned}$$

Remarque : on a aussi $BH = \|\overrightarrow{BH}\| = \sqrt{(-8)^2+(-12)^2+16^2} = \sqrt{464} \approx 21{,}54$

3) a. On a $\overrightarrow{CH}\begin{pmatrix}-14\\-6\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}6\\-6\\12\end{pmatrix}$ or $\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{BC} = -14\times 6 + (-6)\times(-6) + 4\times 12 = 0$

donc les droites (BC) et (CH) sont orthogonales, or C appartient à la droite (BC)
donc C est le projeté orthogonal du point H sur la droite (BC)

b. Comme C est le projeté orthogonal de H sur la droite (BC), la distance du point H à la droite (BC) est CH et

$$\begin{aligned}CH &= \sqrt{(x_H-x_C)^2+(y_H-y_C)^2+(z_H-z_C)^2} = \sqrt{(-9-5)^2+(5-11)^2+\left(-1-(-5)\right)^2}\\ &= \sqrt{(-14)^2+(-6)^2+4^2}\\ &= \sqrt{248}\\ &\approx 15{,}75\end{aligned}$$

Remarque : on a aussi $CH = \|\overrightarrow{CH}\| = \sqrt{(-14)^2+(-6)^2+4^2} = \sqrt{248} = 15{,}75$