

Exercice 1 : $f(x) = 4e^{-0,4x}$

1/ Si $x = 2$, alors $AB = 2$ et $AD = BC = f(2) = 4e^{-0,4 \times 2} = 4e^{-0,8}$

ainsi aire (ABCD) = $AB \times AD = 2 \times f(2) = 2 \times 4e^{-0,8} = 8e^{-0,8} \approx 3,6 \text{ m}^2$

2/ si B a pour abscisse x , alors $AB = x$ et $AD = BC = f(x)$

ainsi aire (ABCD) = $AB \times AD = x \times f(x) = x \times 4e^{-0,4x} = 4xe^{-0,4x}$

$$\text{soit } g(x) = 4xe^{-0,4x} \quad \text{alors } g'(x) = 4e^{-0,4x} + 4x \times (-0,4e^{-0,4x}) \\ = e^{-0,4x}(4 - 1,6x)$$

b/

x	0	2,5	10
$e^{-0,4x}$		+	
$4 - 1,6x$	+	0	-
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	0	$10e^{-1}$	$40e^{-4}$

Ainsi, l'aire du rectangle est maximale lorsque g est maximale soit pour $x = 2,5$.

Le panneau d'aire maximale a donc pour dimensions :

$$\text{longueur : } AB = 2,5 \text{ m} \quad \text{hauteur : } BC = f(2,5) = 4e^{-0,4 \times 2,5} = 4e^{-1} \approx 1,47 \text{ m}$$

Exercice 2 :

a/ Pour tout entier naturel $n \neq 0$, on note $S_n = 1 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$

On veut montrer que pour tout entier naturel $n \neq 0$, $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Initialisation : On a $S_1 = 1$ or $\frac{1 \times (1+1) \times (2 \times 1 + 1)}{6} = \frac{1 \times 2 \times 3}{6} = 1$ donc la propriété est vraie au rang $n = 1$

Hérédité : On suppose qu'il existe un rang $k \geq 1$ tel que $S_k = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ et on cherche alors à démontrer que la propriété est vraie au rang $k+1$, c'est-à-dire

$$S_{k+1} = \frac{(k+1)(k+1+1)(2(k+1)+1)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

Or $S_{k+1} = 1 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2$

$$\begin{aligned}
&= S_k + (k+1)^2 \\
&= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \\
&= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} \\
&= \frac{(k+1)[k(2k+1) + 6(k+1)]}{6} \\
&= \frac{(k+1)(2k^2 + k + 6k + 6)}{6} \\
&= \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6} \\
\text{or } &\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} = \frac{(k+1)(2k^2 + 3k + 4k + 6)}{6} = \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6}
\end{aligned}$$

on a donc $S_{k+1} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$ donc l'hérédité est démontrée

Conclusion : la propriété est vraie pour $n = 1$ et elle est héréditaire donc

pour tout entier naturel $n \neq 0$, $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

b/ On considère l'expression $P_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n}\right)$ définie pour tout entier naturel $n \geq 2$.

On veut montrer que pour tout entier naturel $n \geq 2$, $P_n = \frac{1}{n}$

Initialisation : On a $P_2 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ donc la propriété est vraie au rang $n = 2$

Hérédité : On suppose qu'il existe un rang $k \geq 2$ tel que $P_k = \frac{1}{k}$ et on cherche alors à démontrer que la propriété est vraie au rang $k+1$, c'est-à-dire $P_{k+1} = \frac{1}{k+1}$

$$\begin{aligned}
\text{Or } P_{k+1} &= \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{k}\right)\left(1 - \frac{1}{k+1}\right) \\
&= P_k \times \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) \\
&= \frac{1}{k} \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) \\
&= \frac{1}{k} \left(\frac{k+1-1}{k+1}\right) \\
&= \frac{1}{\cancel{k}} \left(\frac{\cancel{k}}{k+1}\right) \\
&= \frac{1}{k+1} \quad \text{donc l'hérédité est démontrée}
\end{aligned}$$

Conclusion : la propriété est vraie pour $n = 2$ et est héréditaire donc pour tout entier naturel $n \geq 2$, $P_n = \frac{1}{n}$