Term Spé Maths **Maths : Accompagnement personnalisé : corrigé**

Exercice 1

1. Au bout d'une heure, la quantité de médicament dans le sang diminue de 30 %, donc il en reste 70 %. Puis on en injecte à nouveau 1,8 mg. Sachant que $u_0 = 2$, alors $u_1 = 0,70 \times 2 + 1,8 = 3,2$. Au bout d'une heure, la quantité de médicament dans le sang sera de 3,2 mg.

2. Soi $n \in \mathbb{N}$. u_n désigne la quantité de médicament dans le sang au bout de n heures. Une heure plus tard, il ne restera que 70 % de la quantité précédente (70 % de u_n), puis on en ajoute 1,8 mg par injection.
Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0,7 \times u_n + 1,8$.

3. **a.** Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1} < 6$.
Initialisation : $u_0 = 2$ et $u_1 = 3,2$. Donc $u_0 \leqslant u_1 < 6$. L'initialisation est vérifiée.
Hérédité : on suppose que si $n \in \mathbb{N}$, alors $u_n \leqslant u_{n+1} < 6$.
Montrons que $u_{n+1} \leqslant u_{n+2} < 6$.
$u_n \leqslant u_{n+1} < 6 \iff 0,7 \times u_n \leqslant 0,7 \times u_{n+1} < 0,7 \times 6 \iff 0,7u_n \leqslant 0,7u_{n+1} < 4,2$
donc $0,7u_n + 1,8 \leqslant 0,7u_{n+1} + 1,8 < 4,2 + 1,8 \iff 0,7u_n + 1,8 \leqslant 0,7u_{n+1} + 1,8 < 6$.
Donc $u_{n+1} \leqslant u_{n+2} < 6$. L'hérédité est démontrée.
Conclusion : La proposition est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang n, elle l'est aussi au rang $n+1$.
D'après l'axiome de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1} < 6$.

b. Nous venons de montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1} < 6$. Cela signifie que la suite (u_n) est croissante et majorée par 6. Donc d'après le théorème de convergence monotone, la suite (u_n) converge vers une limite finie notée ℓ.

c. La suite (u_n) converge vers ℓ donc ℓ est l'unique solution de l'équation $\ell = 0,7\ell + 1,8$ (théorème du point fixe).
$l = 0,7l + 1,8 \iff 0,3l = 1,8 \iff l = 6$. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 6$

4. On donne $v_n = 6 - u_n$ donc $u_n = 6 - v_n$

a. Si $v_n = 6 - u_n$ *alors*

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= 6 - u_{n+1} \\ &= 6 - (0,7u_n + 1,8) \\ &= 6 - 0,7u_n - 1,8 \\ &= 6 - 07(6 - v_n) - 1,8 \quad \text{car } u_n = 6 - v_n \\ &= 6 - 4,2 + 0,7v_n - 1,8 \\ &= 0,7v_n \end{aligned}$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison q = 0,7
et de 1er terme $v_0 = 6 - u_0 = 6 - 2 = 4$

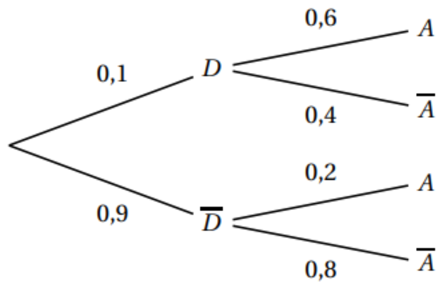
b. Puisque (v_n) est une suite géométrique de raison q = 0,7 et de 1er terme $v_0 = 4$

alors $v_n = v_0 \times q^n = 4 \times 0,7^n$ or $u_n = 6 - v_n$ donc $u_n = 6 - 4 \times 0,7^n$

c. On cherche le plus petit entier n tel que $u_n \geq 5,5$ avec $u_n = 6 - 4 \times 0,7^n$ et d'après la calculatrice, $u_5 \approx 5,33$ et $u_6 \approx 5,53$ donc $n = 6$
Il faudra donc 7 injections (car il y a 7 termes de u_0 à u_6)

Exercice 2
Partie 1

1. Traduire la situation par un arbre pondéré.



2. On a $P(D \cap A) = P(D) \times P_D(A) = 0,1 \times 0,6 = 0,06$.

3. On a de même $P\left(\overline{D} \cap A\right) = P\left(\overline{D}\right) \times P_{\overline{D}}(A) = 0,9 \times 0,2 = 0,18$.
D'après la loi des probabilités totales :
$P(A) = P(D \cap A) + P\left(\overline{D} \cap A\right) = 0,06 + 0,18 = 0,24$.

4. On a $P_A\left(\overline{D}\right) = \dfrac{P\left(A \cap \overline{D}\right)}{P(A)} = \dfrac{P\left(\overline{D} \cap A\right)}{P(A)} = \dfrac{0,18}{0,24} = \dfrac{18}{24} = \dfrac{3}{4} = 0,75$.

Partie 2

1. **a.** Les paramètres de cette loi sont $n = 7$ et $p = 0,24$.
b. On a $P(X = 1) = \binom{7}{1} \times 0,24 \times (1 - 0,24)^{7-1} = 7 \times 0,24 \times 76^6 \approx 0,324$ soir environ 0,32 au centième près.
c. On a $P(X \geqslant 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) \approx 1 - 0,146 - 0,324$ soit environ 0,53.

2. **a.** On a $P_n = 0,24^0 \times 0,76^n = 0,76^n$.
b. La probabilité d'avoir au moins un candidat reçu est $1 - P_n = 1 - 0,76^n$.

Il faut donc résoudre $1 - 0,76^n \geqslant 0,99 \iff 1 - 0,99 \geqslant 0,76^n$ ou $0,01 \geqslant 0,76^n$,
Et d'après la calculatrice, $0,76^{16} \approx 0,012$ et $0,76^{17} \approx 0,009$
Il faut donc présenter au moins 17 candicats