

Exercice 3

Etudier la convexité de chacune des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par les expressions suivantes :

$$f(x) = 6e^{-0,5x+3} + 10x + 6$$

$e^{-0,5x+3}$ est de la forme e^u et $(e^u)' = u'e^u$ d'où

$$f'(x) = 6 \times (-0,5)e^{-0,5x+3} + 10 = -3e^{-0,5x+3} + 10$$

$$\text{et } f''(x) = -3 \times (-0,5)e^{-0,5x+3} = 1,5e^{-0,5x+3}$$

or $e^{-0,5x+3} > 0$ sur $\mathbb{R}$ donc $f''(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$ donc **f est convexe sur $\mathbb{R}$**

$$g(x) = (5x + 5)e^x$$

$$g = u \times v \quad \text{avec} \quad \begin{array}{ll} u(x) = 5x + 5 & \text{et} \quad v(x) = e^x \\ u'(x) = 5 & v'(x) = e^x \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{Or } (uv)' &= u'v + uv' \quad \text{d'où} \quad g'(x) = 5 \times e^x + (5x + 5) \times e^x \\ &= e^x(5 + 5x + 5) \\ &= e^x(5x + 10) \end{aligned}$$

$$g' = u \times v \quad \text{avec} \quad \begin{array}{ll} u(x) = 5x + 10 & \text{et} \quad v(x) = e^x \\ u'(x) = 5 & v'(x) = e^x \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{d'où} \quad g''(x) &= 5 \times e^x + (5x + 10) \times e^x \\ &= e^x(5 + 5x + 10) \\ &= e^x(5x + 15) \end{aligned}$$

On a alors,

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
e^x		+	
$5x + 15$	-	0	+
$g''(x)$	-	0	+

$$\begin{aligned} a &= 5 > 0 \text{ et} \\ 5x + 15 &= 0 \Leftrightarrow x = \frac{-15}{5} = -3 \end{aligned}$$

Ainsi , **g est concave sur $] -\infty ; -3]$ car $g''(x) \leq 0$ sur $] -\infty ; -3]$**

g est convexe sur $[-3 ; +\infty [$ car $g''(x) \geq 0$ sur $[-3 ; +\infty [$

De plus, la courbe C_g admet un point d'inflexion d'abscisse $x = -3$

car la dérivée seconde g'' s'annule en changeant de signe pour $x = -3$