Ex1 a) D'une année à l'autre, le nombre de livres u_n diminue de 5% donc il est multiplié par 0,95 et on achète 1000 nouveaux livres d'où $u_{n+1} = 0,95u_n + 1000$

b) $u_1 = 0,95 \times u_0 + 1000 = 0,95 \times 15000 + 1000 = 15250$

$u_2 = 0,95 u_1 + 1000 = 0,95 \times 15250 + 1000 \simeq 15488$

c) on souhaite montrer que pour tout entier n, $u_n \leq 20000$

(I) : on a $u_0 = 15000$ donc $u_0 \leq 20\,000$ donc la propriété est vraie pour $n = 0$

(H) on suppose qu'il existe un rang $k \geq 0$ tel que $u_k \leq 20000$ et on cherche alors à démontrer que $u_{k+1} \leq 20\,000$

or si $u_k \leq 20\,000$ $\quad \times 0,95$

$\Leftrightarrow 0,95u_k \leq 19000$ $\quad +1000$

$\Leftrightarrow 0,95u_k + 1000 \leq 20\,000$

$\Leftrightarrow u_{k+1} \leq 20\,000$ donc l'hérédité est démontrée

(ccl) : la propriété est vraie pour $n=0$ et elle est héréditaire donc pour tout entier n, $u_n \leq 20\,000$

d) $v_n = 20\,000 - u_n$ donc $u_n = 20\,000 - v_n$

et $v_{n+1} = 20\,000 - u_{n+1}$

$= 20\,000 - (0,95u_n + 1000)$

$v_{n+1} = 20000 - 0,95u_n - 1000$ $\left(\text{car } u_n = 20000 - v_n\right)$

$= 20000 - 0,95(20000 - v_n) - 1000$

$= 20000 - 19000 + 0,95v_n - 1000$

$= 0,95v_n$ donc (v_n) est géométrique de raison $q = 0,95$

et $v_0 = 20000 - u_0 = 20000 - 15000 = 5000$

e) ainsi $v_n = v_0 \times q^n = 5000 \times 0,95^n$

or $u_n = 20000 - v_n$ donc $u_n = 20000 - 5000 \times 0,95^n$

f) D'après la calculatrice, on a $u_{31} \simeq 18980$

et $u_{32} \simeq 19031$.

donc le nombre d'ouvrages dépassera 19000 pour $n = 32$

soit en 2042 $(2010 + 32)$