

EXERCICE 1 : 5 points

Les douanes s'intéressent aux importations de casques audio portant le logo d'une certaine marque. Les saisies des douanes permettent d'estimer que :

- 20 % des casques audio portant le logo de cette marque sont des contrefaçons ;
- 2 % des casques non contrefaits présentent un défaut de conception ;
- 10 % des casques contrefaits présentent un défaut de conception.

L'agence des fraudes commande au hasard sur un site internet un casque affichant le logo de la marque. On considère les événements suivants :

- C : « le casque est contrefait » ;
- D : « le casque présente un défaut de conception » ;
- $\overline{C}$ et $\overline{D}$ désignent respectivement les événements contraires de C et D .

Dans l'ensemble de l'exercice, les probabilités seront arrondies à 10^{-3} si nécessaire.

Partie 1

1. Calculer $P(C \cap D)$. On pourra s'appuyer sur un arbre pondéré.
2. Démontrer que $P(D) = 0,036$.
3. Le casque a un défaut. Quelle est la probabilité qu'il soit contrefait ?

Partie 2

On commande n casques portant le logo de cette marque. On assimile cette expérience à un tirage aléatoire avec remise. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de casques présentant un défaut de conception dans ce lot.

1. Dans cette question, $n = 35$.
 - a. Justifier que X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ où $n = 35$ et $p = 0,036$.
 - b. Calculer la probabilité qu'il y ait parmi les casques commandés, exactement un casque présentant un défaut de conception.
 - c. Calculer $P(X \leq 1)$.
2. Dans cette question, n n'est pas fixé.
 Quel doit être le nombre minimal de casques à commander pour que la probabilité qu'au moins un casque présente un défaut soit supérieur à 0,99 ?

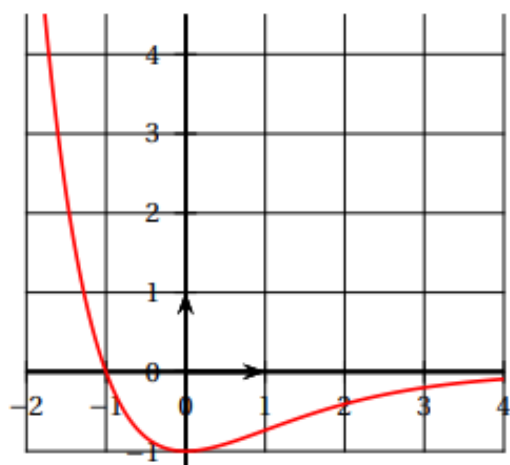
EXERCICE 2 : 5 points

Partie 1

On donne ci-dessous, dans le plan rapporté à un repère orthonormé, la courbe représentant la fonction dérivée f' d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$.

À l'aide de cette courbe, conjecturer, en justifiant les réponses :

1. Le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. La convexité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.



Courbe représentant la **dérivée** f' de la fonction f .

Partie 2

On admet que la fonction f mentionnée dans la Partie 1 est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x+2)e^{-x}.$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et on note f' et f'' les fonctions dérivées première et seconde de f respectivement.

1.
 - a. Montrer que, pour tout nombre réel x , $f'(x) = (-x-1)e^{-x}$.
 - b. Étudier les variations sur $\mathbb{R}$ de la fonction f et dresser son tableau de variations.
 - c. Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[-2; -1]$ dont on donnera une valeur approchée à 10^{-1} près.
2. Déterminer, pour tout nombre réel x , l'expression de $f''(x)$ et étudier la convexité de la fonction f .

Que représente pour la courbe $\mathcal{C}$ son point A d'abscisse 0?

EXERCICE 3 : 5 points

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{3}; +\infty\right[$ par :

$$f(x) = \frac{4x}{1+3x}$$

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = \frac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Calculer u_1 .
2. On admet que la fonction f est croissante sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{3}; +\infty\right[$.
 - a. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$.
 - b. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
 - c. On appelle ℓ la limite de la suite (u_n) . Déterminer la valeur de ℓ .
3. a. Recopier et compléter la fonction Python ci-dessous qui, pour tout réel positif E , détermine la plus petite valeur P tel que : $1 - u_P < E$.

```
def seuil(E) :  
    u = 0,5  
    n = 0  
    while .....  
        u = .....  
        n = n + 1  
    return n
```

- b. Donner la valeur renvoyée par ce programme dans le cas où $E = 10^{-4}$.
4. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n , par :

$$v_n = \frac{u_n}{1 - u_n}$$

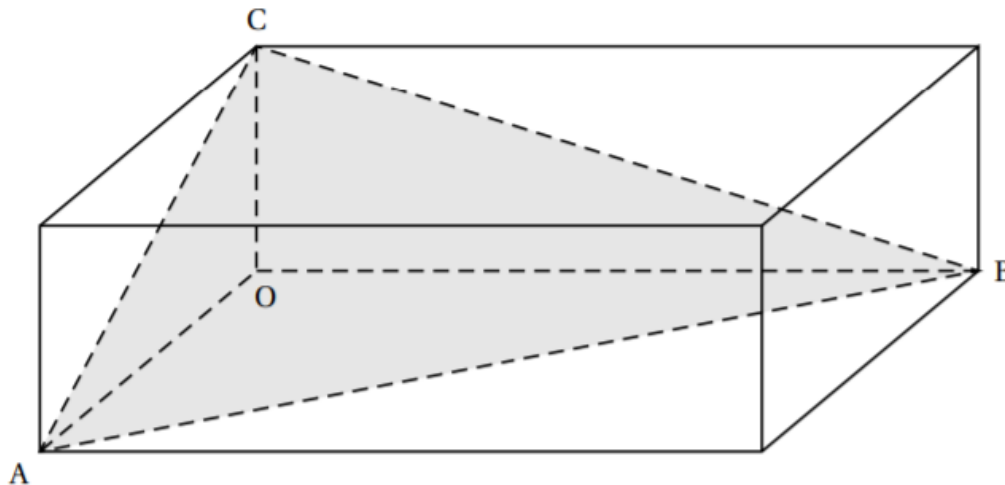
- a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 4.
En déduire, pour tout entier naturel n , l'expression de v_n en fonction de n .
- b. Démontrer que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n = \frac{v_n}{v_n + 1}$.
- c. Montrer alors que, pour tout entier naturel n , on a :

$$u_n = \frac{1}{1 + 0,25^n}.$$

Retrouver par le calcul la limite de la suite (u_n) .

EXERCICE 4 : 5 points

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points :
A de coordonnées $(2; 0; 0)$, B de coordonnées $(0; 3; 0)$ et C de coordonnées $(0; 0; 1)$.



1. Le triangle ABC est-il rectangle ?
2. Montrer que le vecteur $\vec{n} \left(\frac{3}{2} ; \frac{3}{6} \right)$ est normal au plan (ABC).
3. a. Montrer que le point H $\left(\frac{18}{49} ; \frac{12}{49} ; \frac{36}{49} \right)$ appartient au plan (ABC)
b. Montrer que la droite (OH) est orthogonale au plan (ABC)
c. En déduire la distance du point O au plan (ABC).