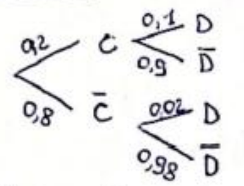
# Corrigé sujet de rattrapage

## Exercice 1 : (5)

### Partie 1 :




1) $P(C \cap D) = P(C) \times P_C(D)$
$= 0,2 \times 0,1$
$= 0,02.$ (0,5)

2) C et $\bar{C}$ forment une partition de l'univers
D'après la formule des probas totales,
$P(D) = P(C \cap D) + P(\bar{C} \cap D)$
$= 0,02 + P(\bar{C}) \times P_{\bar{C}}(D)$
$= 0,02 + 0,8 \times 0,02$
$= 0,02 + 0,016$ (1)
$= 0,036$

3) $P_D(C) = \dfrac{P(C \cap D)}{P(D)} = \dfrac{0,02}{0,036} = \dfrac{20}{36} = \dfrac{5}{9} \simeq 0,556.$ (0,75)

### Partie 2 :

1) On répète 35 fois de manière identique et indépendante la même épreuve de Bernoulli qui comporte 2 issues avec le succès S : "le casque présente un défaut" de proba $p = 0,036$
Il s'agit d'un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 35$ et $p = 0,036$.
X compte le nombre de succès donc X suit la loi binomiale $B(35 ; 0,036)$. (0,5)

b) $P(X = 1) = \binom{35}{1} 0,036^1 (1 - 0,036)^{35-1}$
$\simeq 0,362.$ (0,5)

c) $P(X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1) = \binom{35}{0} 0,036^0 (1-0,036)^{35} + 0,362$
$\simeq 0,639$ (0,75).

2) $P(X \geq 1) > 0,99$ } 0,25
$1 - P(X < 1) > 0,99$
$1 - P(X = 0) > 0,99$
$0,01 > P(X = 0)$
$0,01 > \binom{n}{0} 0,036^0 \times (1 - 0,036)^n$ } 0,25
$0,01 > 0,964^n$
$\ln 0,01 > n \ln 0,964$
$\dfrac{\ln 0,01}{\ln 0,964} < n$ } 0,25

$\dfrac{\ln 0,01}{\ln 0,964} \simeq 125,6$ soit $\underbrace{126}_{0,25}$ casques. (1)

## Exercice 2 : (5)

### Partie 1 :

1) Sur $]-\infty ; -1]$, $f'(x) \geq 0$ donc $f$ est croissante
Sur $[-1 ; +\infty[$, $f'(x) \leq 0$ donc $f$ est décroissante (0,5)

2) Sur $]-\infty ; 0]$, $f'$ est décroissante donc $f$ est concave.
Sur $[0 ; +\infty[$, $f'$ est croissante donc $f$ est convexe. (0,5)

### Partie 2 :

1. a) $f(x) = (x+2)e^{-x}$
$f'(x) = 1 \times e^{-x} + (x+2) \times (-e^{-x})$
$= e^{-x}(1 - x - 2)$ (0,75)
$= e^{-x}(-1 - x).$

b) $-1 - x = 0$
$-x = 1$
$x = -1$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $-1-x$ | | + | 0 | − | |
| $e^{-x}$ | | + | | + | |
| $f'(x)$ | | + | 0 | − | |
| $f(x)$ | | ↗ | $e$ | ↘ | |

(1)

c) $f(-2) = (-2+2)e^{-2} = 0$
Sur $[-2 ; -1]$, $f$ est définie, continue et strictement croissante.
Elle prend ses valeurs dans $[0 ; e]$. (0,75)
$2 \in [0 ; e]$.
D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution dans cet intervalle.
$\alpha \simeq -1,6$ (0,25)

2) $f'(x) = (-x - 1)e^{-x}$.
$f''(x) = -1e^{-x} + (-x-1) \times (-e^{-x})$
$= e^{-x}(-1 + x + 1).$
$= xe^{-x}.$

$f''(x) = 0 \iff xe^{-x} = 0$ $\qquad e^{-x} > 0$
$\iff x = 0$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | | − | 0 | + | |

(1)

$f$ est concave sur $]-\infty ; 0]$ et est convexe sur $[0 ; +\infty[$.
Le point A représente le point d'inflexion
(0,25)

1. On a donc pour $n = 0$, $u_1 = f(u_0) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{1+\frac{3}{2}} = \frac{2}{\frac{5}{2}} = \frac{4}{5}$.

2. On admet que la fonction $f$ est croissante sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{3}\ ;\ +\infty\right[$.

   a. On veut montrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, on a :

$$\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2.$$

*Initialisation* : on a $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_1 = \frac{4}{5}$ ; de plus $\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{2} \leqslant \frac{4}{5} \leqslant 2$, donc : $\frac{1}{2} \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 2$ : l'encadrement est vrai au rang 0 ;

*Hérédité* : on suppose que pour $n \geqslant 0$, $\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$.

La fonction $f$ étant croissante les images des quatre nombres ci-dessus sont rangées dans le même ordre, soit : $f\left(\frac{1}{2}\right) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(2)$.

Or on a vu que $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{5}$ et on a $f(2) = \frac{8}{1+6} = \frac{8}{7}$ ;

de plus $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$ donc $\frac{4}{5} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant \frac{8}{7}$.

Or $\frac{1}{2} < \frac{4}{5}$ et $\frac{8}{7} < 2$ ; on a donc finalement :

$\frac{1}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 2$ : l'encadrement est donc vrai au rang $n+1$.

*Conclusion* : l'encadrement est vrai au rang 0 et s'il est vrai au rang $n \geqslant 0$, il est vrai au rang $n+1$ : par le principe de récurrence pour tout entier naturel $n$, on a : $\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$.

   b. La suite $(u_n)$ est croissante et elle majorée par 2, elle est donc convergente vers une limite $\ell$ telle que : $\frac{1}{2} \leqslant \ell \leqslant 2$.

   c. La fonction $f$ est continue car dérivable au moins sur $\mathbb{R}_+$ donc la limite $\ell$ vérifie l'égalité $f(\ell) = \ell$ ; on résout cette équation :

$$f(\ell) = \ell \iff \frac{4\ell}{1+3\ell} = \ell \iff 4\ell = \ell(1+3\ell) \iff 0 = \ell(1+3\ell-4)$$

$$\iff \ell(3\ell-3) = 0 \iff 3\ell(\ell-1) = 0 \iff \left[\begin{array}{rcl} \ell & = & 0 \\ & \text{ou} & \\ \ell - 1 & = & 0 \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{rcl} \ell & = & 0 \\ & \text{ou} & \\ \ell & = & 1 \end{array}\right.$$

Comme $\ell \geqslant \frac{1}{2}$, la seule solution possible est 1 ; la suite $(u_n)$ converge vers 1.

3. a. On complète la fonction Python ci-dessous qui, pour tout réel positif $E$, détermine la plus petite valeur $P$ tel que : $1 - u_P < E$ :

```
def seuil(E) :
    u = 0,5
    n = 0
    while 1 - u >= E
        u = 4 * u/(1 + 3 * u)
        n = n + 1
    return n
```

   b. On obtient $u_7 \approx 0{,}999\,939$, donc $1 - u_7 < 10^{-4}$. Le programme renvoie $n = 7$.

**4.** On considère la suite $(v_n)$ définie, pour tout entier naturel $n$, par :

$$v_n = \frac{u_n}{1 - u_n}$$

**a.** Pour tout entier naturel $n$, $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}}{1 - u_{n+1}}$ soit en utilisant la définition de $u_{n+1}$ :

$v_{n+1} = \dfrac{\frac{4u_n}{1+3u_n}}{1 - \frac{4u_n}{1+3u_n}}$ soit en multipliant chaque terme par $1 + 3u_n$ ;

$v_{n+1} = \dfrac{4u_n}{1 + 3u_n - 4u_n} = \dfrac{4u_n}{1 - u_n} = 4\dfrac{u_n}{1 - u_n} = 4v_n$.

L'égalité, vraie pour tout naturel $n$, $v_{n+1} = 4v_n$ montre que la suite $(v_n)$ est géométrique de raison 4, de premier terme $v_0 = \dfrac{u_0}{1 - u_0} = \dfrac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$.

On sait qu'alors , pour tout entier naturel $n$, $v_n = 1 \times 4^n = 4^n$.

**b.** Quel que soit $n \in \mathbb{N}$,

$v_n = \dfrac{u_n}{1 - u_n} \iff v_n(1 - u_n) = u_n \iff v_n - u_n v_n = u_n \iff v_n = u_n v_n + u_n \iff v_n = u_n(v_n + 1)$.

Comme $v_n = 4^n$, $v_n \geqslant 1$, donc $v_n + 1 \geqslant 2$, donc $v_n + 1 \neq 0$ et finalement en multipliant par $\dfrac{1}{v_n + 1}$, on obtient $u_n = \dfrac{v_n}{v_n + 1}$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

**c.** On sait que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 4^n$, d'où en remplaçant dans l'écriture précédente :

$u_n = \dfrac{4^n}{4^n + 1}$ et en multipliant par $\dfrac{1}{4^n}$ :

$u_n = \dfrac{1}{1 + \frac{1}{4^n}}$. Or $\dfrac{1}{4^n} = \dfrac{1^n}{4^n} = \left(\dfrac{1}{4}\right)^n = 0{,}25^n$, d'où $u_n = \dfrac{1}{1 + 0{,}25^n}$.

Comme $0 < 0{,}25 < 1$, on peut dire que $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}25^n = 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \dfrac{1}{1+0} = 1$.

Exercice 4

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0\\-3\\1\end{pmatrix}$

1) $AB = \sqrt{13}$ $AC = \sqrt{5}$ $BC = \sqrt{10}$ $\Rightarrow AB^2 \neq AC^2 + BC^2$ donc ABC n'est pas rectangle 1

2) $\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n} = -2\times3 + 3\times2 + 0\times6 = 0\\ \overrightarrow{AC}\cdot\vec{n} = -2\times3 + 0\times2 + 1\times6 = 0\end{array}\right\}$ $\vec{n} \perp (ABC)$ 1

3) a) $\overrightarrow{AH} = \alpha\,\overrightarrow{AB} + \beta\,\overrightarrow{AC}$ 1,5

$\begin{pmatrix}-80/49\\12/49\\36/49\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \alpha = \dfrac{4}{49}$ $\beta = \dfrac{36}{49}$

b) $\overrightarrow{OH}\begin{pmatrix}18/49\\12/49\\36/49\end{pmatrix} = \dfrac{6}{49}\vec{n}$ donc $\overrightarrow{OH}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires donc $(OH) \perp (ABC)$ 1

c) $H \in (ABC)$ et $(OH) \perp (ABC)$ donc H est le projeté orthogonal de O sur (ABC). La distance de O au plan (ABC) est donc

$OH = \sqrt{\left(\dfrac{18}{49}\right)^2 + \left(\dfrac{12}{49}\right)^2 + \left(\dfrac{36}{49}\right)^2} = \dfrac{6}{7}$ 0,5