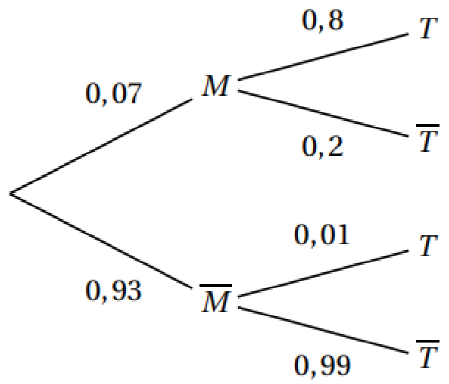
Exercice 1 :

1. Pour calculer la probabilité de l'évènement $M \cap T$, on s'appuie sur un arbre pondéré :



On a donc $P(M \cap T) = P(M) \times P_M(T) = 0{,}07 \times 0{,}8 = 0{,}056$

2. M et $\overline{M}$ formant une partition de l'univers, d'après les probabilités totales,
$P(T) = P(M \cap T) + P\left(\overline{M} \cap T\right) = 0{,}07 \times 0{,}8 + 0{,}93 \times 0{,}01 = 0{,}0653$.

3. $P_M(T)$ est la probabilité d'avoir un test positif sachant qu'on est malade, et $P_T(M)$ est la probabilité d'être malade sachant que le test est positif.
Dans un contexte de dépistage de la maladie, il est plus pertinent de calculer la probabilité d'être malade sachant que le test est positif c'est-à-dire $P_T(M)$.

4. On considère dans cette question que la personne choisie au hasard a eu un test positif.
La probabilité qu'elle soit malade est : $P_T(M) = \dfrac{P(M \cap T)}{P(T)} = \dfrac{0{,}07 \times 0{,}8}{0{,}0653} \approx 0{,}86$

5. On choisit des personnes au hasard dans la population. La taille de la population de ce pays permet d'assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.
On note X la variable aléatoire qui donne le nombre d'individus ayant un test positif parmi les 10 personnes.

a. Le tirage étant assimilé à un tirage avec remise, on a une indépendance des 10 tirages, le succès étant le test est positif, donc X suit la loi binomiale de paramètres n = 10 et p = 0.0653

b. On cherche $P(X=2) = \binom{10}{2} \times 0{,}0653^2 \times (1 - 0{,}0653)^{10-2} \approx 0{,}11$

6) On cherche le plus petit entier n tel que : $P(X \geq 1) \geq 0.99$

$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{n}{0} \times 0{,}0653^0 \times (1 - 0{,}0653)^n = 1 - 0{,}9347^n$

On cherche donc le plus petit entier n tel que :

$1 - 0{,}9347^n \geq 0{,}99 \quad \Leftrightarrow \quad -0{,}9347^n \geq -0{,}01 \quad \Leftrightarrow \quad 0{,}9347^n \leq 0{,}01$

D'après la calculatrice, on a $0{,}9347^{68} \approx 0{,}010132$ et $0{,}9347^{69} \approx 0{,}00947$ donc $n = 69$

Il faut donc tester 69 personnes dans ce pays pour qu'il y ait plus de 99 % de chances qu'au moins une personne ait un test positif.

Exercice 2 :

Partie A

1. La fonction p est continue et dérivable sur $[-3\,;\,4]$.

$\forall x \in [-3\,;\,4]$, $p'(x) = 3x^2 - 6x + 5$

Ce trinôme du second degré n'admet aucune racine ($\Delta = -24 < 0$) donc $\forall x \in [-3\,;\,4]$, $p'(x) > 0$.
Donc la fonction p est strictement croissante sur $[-3\,;\,4]$.

2. $p(-3) = -68$ et $p(4) = 37$

La fonction p est continue et strictement croissante sur $[-3\,;\,4]$ à valeurs dans $[-68\,;\,37]$. Or $0 \in [-68\,;\,37]$, donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $p(x) = 0$ admet une unique solution, notée α, dans l'intervalle $[-3\,;\,4]$.

3. À la calculatrice, $\alpha \approx -0{,}2$.

4. D'après les variations de la fonction p, et en utilisant le résultat précédent, on peut établir le tableau de signe de la fonction p sur $[-3\,;\,4]$:

x	-3		α		4
$p(x)$		$-$	0	$+$	

Partie B $\quad f(x) = \frac{e^x}{1+x^2}$

1.a. $f = \frac{u}{v}$ avec $u(x) = e^x$ et $v(x) = 1 + x^2$

$u'(x) = e^x \qquad v'(x) = 2x$

Or $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{(u'v - uv')}{v^2}$ d'où $f'(x) = \frac{e^x(1+x^2) - e^x \times 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{e^x(1+x^2-2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{e^x(x^2-2x+1)}{(1+x^2)^2}$

b. La courbe C_f admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1 si $f'(1) = 0$

or $f'(1) = \frac{e^1\left(1+1^2-2\right)}{(1+1^2)^2} = \frac{e^1 \times 0}{4} = 0$ donc C_f admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1

2. **a.** Avec la précision permise par le graphique, on peut voir que la fonction f est :

- convexe sur $[-3\,;\,0]$;
- concave sur $[0\,;\,1]$;
- convexe sur $[1\,;\,4]$.

Donc $\mathscr{C}_f$ admet deux points d'inflexion, aux abscisses $x = 0$ et $x = 1$.
Le toboggan semble donc assurer de bonnes sensations.

b. $\forall x \in [-3\,;\,4] : f''(x) = \frac{p(x)(x-1)e^x}{\left(1+x^2\right)^3}$

Recherchons les points d'inflexion, c'est-à-dire les valeurs de $x \in [-3\,;\,4]$ pour lesquelles $f''(x)$ s'annule et change de signe.
$\forall x \in [-3\,;\,4]$, $\left(1+x^2\right)^3 > 0$ et $e^x > 0$ donc $f''(x)$ a le même signe que $p(x)(x-1)$.
On construit alors le tableau de signe suivant :

x	-3		α		1		4
$p(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

La fonction f'' s'annule et change de signe en $x = \alpha$ et $x = 1$. Donc $\mathscr{C}_f$ admet deux points d'inflexion. Le toboggan assure donc de bonnes sensations.

Exercice 3 :

Partie A : modèle discret de la quantité médicamenteuse

1. Au bout de 30 min, 10 % de 1 mg ont disparu : il en reste donc 0,9 mg et on donne alors 0,25 mg supplémentaires : on a donc $u_1 = 1,15$.
2. Si u_n est la quantité de médicament présente au bout de n périodes de 30 min, à la $(n+1)^{\text{e}}$ période 10 % auront disparu ; il en restera donc $0,9u_n$ et on donne alors 0,25 mg de médicament supplémentaire ; on a donc $u_{n+1} = 0,9u_n + 0,25$.

3. a. Il faut montrer que pour tout entier n, $u_n \leq u_{n+1} < 5$

Initialisation : On a $u_0 = 1$ et $u_1 = 1,15$ donc $u_0 \leq u_1 < 5$
donc la propriété est vraie au rang $n = 0$

Hérédité : On suppose qu'il existe un rang $k \geq 0$ tel que $u_k \leq u_{k+1} < 5$ et on cherche alors à démontrer que la propriété est vraie au rang k+1, c'est-à-dire $u_{k+1} \leq u_{k+2} < 5$

or $u_k \leq u_{k+1} < 5$

$\Leftrightarrow$ $0,9u_k \leq 0,9u_{k+1} < 4,5$

$\Leftrightarrow$ $0,9u_k + 0,25 \leq 0,9u_{k+1} + 0,25 < 4,75$ (or $u_{k+1} = 0,9u_k + 0,25$ et $u_{k+2} = 0,9u_{k+1} + 0,25$)

$\Leftrightarrow$ $u_{k+1} < u_{k+2} < 5$ donc l'hérédité est démontrée

Conclusion : la propriété est vraie pour $n = 0$ et elle est héréditaire, donc pour tout entier n, on a
$u_n \leq u_{n+1} < 5$

b. Pour tout entier n, on a $u_n \leq u_{n+1}$ donc la suite (u_n) est croissante
$u_n < 5$ donc la suite (u_n) est majorée par 5,

Ainsi (u_n) est croissante et majorée, donc (u_n) converge

4. a. Recopier et compléter le script écrit en langage Python suivant de manière à déterminer au bout de combien de périodes de trente minutes le médicament commence à être réellement efficace.

```
def efficace():
  u=1
  n=0
  while u < 1.8 :
      u=0.9*u+0.25
      n = n+1
   return n
```

b. Le script renvoie $n = 8$,car $u_8 \approx 1,854 > 1,8$.
Le médicament est réellement efficace après 4 heures.

5. On donne $v_n = 2,5 - u_n$ donc $u_n = 2,5 - v_n$

a. Si $v_n = 2,5 - u_n$ *alors*

$v_{n+1} = 2,5 - u_{n+1}$
$= 2,5 - (0,9u_n + 0,25)$
$= 2,5 - 0,9u_n - 0,25$
$= 2,5 - 0,9(2,5 - v_n) - 0,25$ car $u_n = 2,5 - v_n$
$= 2,5 - 2,25 + 0,9v_n - 0,25$
$= 0,9v_n$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison q = 0,9 et de 1er terme $v_0 = 2,5 - u_0 = 2,5 - 1 = 1,5$

b. Puisque (v_n) est une suite géométrique de raison q $= 0{,}9$ et de 1er terme $v_0 = 1{,}5$

alors $v_n = v_0 \times q^n = 1{,}5 \times 0{,}9^n$ or $u_n = 2{,}5 - v_n$ donc $u_n = 2{,}5 - 1{,}5 \times 0{,}9^n$

c. On sait que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $0{,}9^n < 1$, car $-1 < 0{,}9 < 1$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}9^n = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2{,}5 < 3$.

Conclusion : à aucun moment le traitement ne sera dangereux pour le patient.

Partie B : modèle continu de la quantité médicamenteuse

$$f(t) = 2{,}5 - 1{,}5\mathrm{e}^{-0{,}2t},$$

1. $3 \text{ h } 45 \text{ min} = 3 + \dfrac{45}{60} = 3 + \dfrac{3}{4} = 3 + \dfrac{75}{100} = 3 + 0{,}75 = 3{,}75.$

On a donc $f(3{,}75) = 2{,}5 - 1{,}5\mathrm{e}^{-0{,}2\times 3{,}75} = 2{,}5 - 1{,}5 \times \mathrm{e}^{-0{,}75} \approx 1{,}791 < 1{,}8$. Le traitement n'est pas efficace au bout de 3 h 45 min.

2. Il faut trouver t tel que $f(t) \geqslant 1{,}8$, soit

et d'après la calculatrice, on a $f(3{,}81) \approx 1{,}7999$ et $f(3{,}82) \approx 1{,}8013$ donc $t \approx 3{,}82$ or $0{,}82 \times 60 = 49{,}2$ donc le médicament est réellement efficace après plus de 3 h 49 min

3. Ce temps est inférieur à celui de la question 4. b. La perfusion est donc plus rapidement efficace.

Exercice 4 :

Dans un repère de l'espace, on donne les points A (1 ; 2 ; 3), B (3 ; 0 ; 1), C (-1 ; 5 ; 1) et L (14 ; -7 ; -26)

Le point K est le milieu de [AB] et P est le point tel que $\overrightarrow{CP} = 3\,\overrightarrow{AB}$.

1) Les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-2\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\3\\-2\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires car $\frac{2}{-2} \neq \frac{-2}{3} \neq \frac{-2}{-2}$ donc les points A, B et C ne sont pas alignés et ils définissent un plan.

2) K est le milieu de [AB] donc K $\left(\frac{1+3}{2} ; \frac{2+0}{2} ; \frac{3+1}{2}\right)$ soit K (2 ; 1 ; 2)

$$\overrightarrow{CP} = 3\,\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x_P-(-1)\\y_P-5\\z_P-1\end{pmatrix} = 3 \times \begin{pmatrix}2\\-2\\-2\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x_P+1\\y_P-5\\z_P-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\-6\\-6\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}x_P + 1 = 6\\y_P - 5 = -6\\z_P - 1 = -6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_P = 6 - 1\\y_P = -6 + 5\\z_P = -6 + 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_P = 5\\y_P = -1\\z_P = -5\end{cases}$$

donc les coordonnées du point P sont (5 ; -1 ; -5).

3) $\overrightarrow{AP} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$

$$\begin{pmatrix}5-1\\-1-2\\-5-3\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}2\\-2\\-2\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}-2\\3\\-2\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}4 = 2\alpha - 2\beta\\-3 = -2\alpha + 3\beta\\-8 = -2\alpha - 2\beta\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2 = \alpha - \beta\\-3 = -2\alpha + 3\beta\\-8 = -2\alpha - 2\beta\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\beta = \alpha - 2\\-3 = -2\alpha + 3(\alpha - 2)\\-8 = -2\alpha - 2(\alpha - 2)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\beta = \alpha - 2\\-3 = -2\alpha + 3\alpha - 6\\-8 = -2\alpha - 2\alpha + 4\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \alpha - 2 \\ -3 = \alpha - 6 \\ -8 - 4 = -4\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \alpha - 2 \\ -3 + 6 = \alpha \\ -12 = -4\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \alpha - 2 \\ 3 = \alpha \\ \alpha = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 3 - 2 \\ \alpha = 3 \\ \alpha = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 1 \\ \alpha = 3 \\ \alpha = 3 \end{cases}$$

Ainsi $\overrightarrow{AP} = 3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ donc P appartient au plan (ABC)

4) Les vecteurs $\overrightarrow{PL}\begin{pmatrix} 9 \\ -6 \\ -21 \end{pmatrix}$ $et\ \overrightarrow{PK}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$ sont colinéaires car $\frac{9}{-3} = \frac{-6}{2} = \frac{-21}{7} = -3$ donc $\overrightarrow{PL} = -3\,\overrightarrow{PK}$

Donc les points P, L et K sont alignés.