Terminales	**MATHEMATIQUES** : EPREUVE DE SPECIALITE
	SUJET DE REVISION
Durée : 4 h	*Calculatrice autorisée*

Exercice 1 (4 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.

Aucune justification n'est demandée.

Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace, on donne les points

$A\,(1\,;\,0\,;\,-1)$ $B\,(1\,;\,2\,;\,3)$ $C\,(-5\,;\,5\,;\,0)$ et $D\,(13\,;\,-4\,;\,9)$

1. Les points A, B, C et D sont tels que $\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$ avec :

a) $\alpha = 2$ et $\beta = -3$ b) $\alpha = 3$ et $\beta = -2$ c) $\alpha = -3$ et $\beta = -2$ d) $\alpha = -2$ et $\beta = 3$

2. Les droites (AC) et (BD) sont :

a) orthogonales   b) strictement parallèles   c) sécantes   d) non coplanaires

3. Une valeur approchée au degré près d'une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ est :

a) 90 °   b) 39 °   c) 66 °   d) 45 °

4. Un vecteur normal au plan (ABC) est :

a) $\vec{n}\begin{pmatrix}0\\4\\2\end{pmatrix}$ b) $\vec{n}\begin{pmatrix}0\\-2\\-4\end{pmatrix}$ c) $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\-4\\2\end{pmatrix}$ d) $\vec{n}\begin{pmatrix}6\\8\\-4\end{pmatrix}$

EXERCICE 2 : 5 points

Un biologiste a modélisé l'évolution d'une population de bactéries (en milliers d'entités) par la fonction f définie sur $[0 ; 5]$ par

$$f(t) = e^3 - e^{-0,5t^2+t+2}$$

où t désigne le temps en heures depuis le début de l'expérience.

Partie A

1/ Justifier que pour tout réel $t \in [0; 5]$, $f'(t) = (t-1)e^{-0,5t^2+t+2}$

2/ Etablir le tableau de variation de f sur $[0 ; 5]$

3/ Justifier que, sur $[0 ; 5]$, l'équation $f(t) = 10$ admet 2 solutions α et β et donner une valeur approchée de α et β à 10^{-2} près.

4/ On admet que pour tout réel $t \in [0; 5]$, $f''(t) = (2t - t^2)e^{-0,5t^2+t+2}$

Etudier le signe de f'' sur $[0 ; 5]$ et en déduire la convexité de la fonction f sur $[0 ; 5]$

Partie B

À partir de cette modélisation, le biologiste propose les quatre affirmations ci-dessous.

En vous aidant des résultats de la Partie A, indiquer pour chacune d'elles si elle est vraie ou fausse.

- **Affirmation 1** : «La population augmente en permanence».
- **Affirmation 2** : «La population de bactéries aura un effectif inférieur à 10000 pendant plus d'une heure».
- **Affirmation 3** : «La croissance de la population de bactéries ralentit au bout de 2 heures
- **Affirmation 4** : » «La population ne dépassera jamais 25 000 bactéries».

EXERCICE 3 : 5 points

Un commerçant vend deux types de matelas : matelas RESSORTS et matelas MOUSSE.
On suppose que chaque client achète un seul matelas.
On dispose des informations suivantes :

- 20 % des clients achètent un matelas RESSORTS.
  Parmi eux, 90 % sont satisfaits de leur achat.
- 82 % des clients sont satisfaits de leur achat.

Les deux parties peuvent être traitées de manière indépendante.

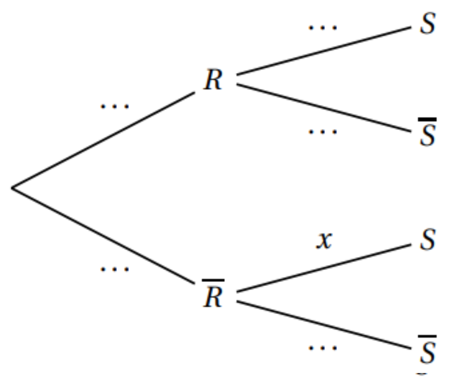
Partie A

On choisit au hasard un client et on note les évènements :

- R : « le client achète un matelas RESSORTS »,
- S : « le client est satisfait de son achat ».

On note $x = P_{\overline{R}}(S)$, où $P_{\overline{R}}(S)$ désigne la probabilité de S sachant que R n'est pas réalisé.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-contre décrivant la situation.
2. Démontrer que $x = 0,8$.
3. On choisit un client satisfait de son achat.
   Quelle est la probabilité qu'il ait acheté un matelas RESSORTS?
   On arrondira le résultat à 10^{-2}.



Partie B

1. On choisit 5 clients au hasard.
   On considère la variable aléatoire X qui donne le nombre de clients satisfaits de leur achat parmi ces 5 clients.
   a. On admet que X suit une loi binomiale. Donner ses paramètres.
   b. Déterminer la probabilité qu'au plus trois clients soient satisfaits de leur achat.
   On arrondira le résultat à 10^{-3}.
2. Soit n un entier naturel non nul.
   On choisit à présent n clients au hasard. Ce choix peut être assimilé à un tirage au sort avec remise.
   a. On note p_n la probabilité que les n clients soient tous satisfaits de leur achat.
   Démontrer que $p_n = 0,82^n$.
   b. Déterminer les entiers naturels n tels que $p_n < 0,01$.
   Interpréter dans le contexte de l'exercice.

EXERCICE 4 : 6 points

En mai 2020, une entreprise fait le choix de développer le télétravail afin de s'inscrire dans une démarche écoresponsable.
Elle propose alors à ses 5000 collaborateurs en France de choisir entre le télétravail et le travail au sein des locaux de l'entreprise.

En mai 2020, seuls 200 d'entre eux ont choisi le télétravail.
Chaque mois, depuis la mise en place de cette mesure, les dirigeants de l'entreprise constatent que 85% de ceux qui avaient choisi le télétravail le mois précédent choisissent de continuer, et que, chaque mois, 450 collaborateurs supplémentaires choisissent le télétravail.
On modélise le nombre de collaborateurs de cette entreprise en télétravail par la suite (a_n).
Le terme a_n désigne ainsi une estimation du nombre de collaborateurs en télétravail le n-ième mois après le mois de mai 2020. Ainsi $a_0 = 200$.

Partie A :

1. Calculer a_1.

2. Justifier que pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 0{,}85a_n + 450$.

3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = a_n - 3000$.

   a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,85.

   b. Exprimer v_n en fonction de n pour tout entier naturel n.

   c. En déduire que, pour tout entier naturel n, $a_n = -2800 \times 0{,}85^n + 3000$.

4. Déterminer le nombre de mois au bout duquel le nombre de télétravailleurs sera strictement supérieur à 2500, après la mise en place de cette mesure dans l'entreprise.

Partie B :

Afin d'évaluer l'impact de cette mesure sur son personnel, les dirigeants de l'entreprise sont parvenus à modéliser le nombre de collaborateurs satisfaits par ce dispositif à l'aide de la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{5u_n + 4}{u_n + 2}$

où u_n désigne le nombre de milliers de collaborateurs satisfaits par cette nouvelle mesure au bout de n mois après le mois de mai 2020.

1. Démontrer que la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{5x+4}{x+2}$ est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$

2. **a.** Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$

   Remarque : on pourra être amené à utiliser le sens de variation de la fonction f

   b. Justifier que la suite (u_n) est convergente.

3. On admet que pour tout entier naturel n, $0 \leq 4 - u_n \leq 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$

   En déduire la limite de la suite (u_n) et l'interpréter dans le contexte de la modélisation.