EXERCICE 1 : **1. b** **2.c** **3.c** **4.d**

(les justifications suivantes n'étaient pas exigées)

1. On cherche α et β tels que $\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$ avec $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\2\\4\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-6\\5\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}12\\-4\\10\end{pmatrix}$, on a alors

$$\begin{pmatrix}12\\-4\\10\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}0\\2\\4\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}-6\\5\\1\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 12 = -6\beta \\ -4 = 2\alpha + 5\beta \\ 10 = 4\alpha + \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \frac{12}{-6} = -2 \\ -4 = 2\alpha + 5\times(-2) \\ 10 = 4\alpha - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -2 \\ -4 = 2\alpha - 10 \\ 10 + 2 = 4\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -2 \\ -4 + 10 = 2\alpha \\ 12 = 4\alpha \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -2 \\ \alpha = \frac{6}{2} = 3 \\ \alpha = \frac{12}{4} = 3 \end{cases}$$ on a donc **α = 3 et β = −2**

2. D'après la question précédente, on a $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$ ce qui signifie que les points A, B, C et D sont coplanaires et donc que les droites (AC) et (BD) sont coplanaires

Or $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-6\\5\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}12\\-6\\6\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires car $\frac{12}{-6} \neq \frac{-6}{5} \neq \frac{6}{1}$

donc les droites (AC) et (BD) ne sont pas parallèles.

Ainsi, **les droites (AC) et (BD)** sont coplanaires et non parallèles, elles **sont donc sécantes.**

Remarque : on peut aussi vérifier que $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} \neq 0$ ce qui prouve que (AC) et (BD) ne sont pas orthogonales.

3. On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\2\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-6\\5\\1\end{pmatrix}$ ainsi $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0\times(-6) + 2\times 5 + 4\times 1 = 14$

et d'autre part $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$

or $AB = \sqrt{0^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ et $AC = \sqrt{(-6)^2 + 5^2 + 1^2} = \sqrt{62}$

ainsi $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) = \sqrt{20} \times \sqrt{62} \times \cos(\widehat{BAC})$

De ces 2 façons différentes de calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ on en déduit que $\sqrt{20} \times \sqrt{62} \times \cos(\widehat{BAC}) = 14$

ainsi $\cos(\widehat{BAC}) = \frac{14}{\sqrt{20}\times\sqrt{62}}$ $\Leftrightarrow$ $\cos(\widehat{BAC}) \approx 0{,}398$ d'où $\boldsymbol{\widehat{BAC} \approx 66°}$

4. Le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (ABC) si et seulement si $\overrightarrow{AB}.\vec{n} = 0$ **et** $\overrightarrow{AC}.\vec{n} = 0$

Or seul le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}6\\8\\-4\end{pmatrix}$ vérifie cette condition car

avec $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\2\\4\end{pmatrix}$ on a $\overrightarrow{AB}.\vec{n} = 0\times 6 + 2\times 8 + 4\times(-4) = 0$

et avec $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-6\\5\\1\end{pmatrix}$ on a aussi $\overrightarrow{AC}.\vec{n} = -6\times 6 + 5\times 8 + 1\times(-4) = 0$

ainsi $\overrightarrow{AB}.\vec{n} = 0$ **et** $\overrightarrow{AC}.\vec{n} = 0$ donc $\boldsymbol{\vec{n}}\begin{pmatrix}\mathbf{6}\\\mathbf{8}\\\mathbf{-4}\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC)

EXERCICE 2 : $f\ (t)\ = e^3\ - e^{-0,5t^2+t+2}$

Partie A

1/ $e^{-0,5t^2+t+2}$ est de la forme e^u avec $u(t) = -0,5t^2 + t + 2 \quad d'où\ u'(t) = -0,5 \times 2t + 1 = \ -t + 1$

Or $(e^u)' = u'e^u$ donc $f'(t) = 0 - (-t + 1)e^{-0,5t^2+t+2} = (t - 1)e^{-0,5t^2+t+2}$

2/

t	0		1		5
$t-1$		$-$	0	$+$	
$e^{-0,5t^2+t+2}$			$+$		
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$e^3 - e^2 \approx 12,7$	↘	$e^3 - e^{2,5} \approx 7,9$	↗	$e^3 - e^{-5,5} \approx 20,1$

3/ Sur [0 ; 1], la fonction f est définie, continue et strictement décroissante. Or 10 est compris entre $f(0) \approx 12,7$ et $f(1) \approx 7,9$ donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(t) = 10$ admet 1 unique solution α sur [0 ; 1].

De même, on montre que l'équation $f(t) = 10$ admet 1 unique solution β sur [1 ; 5].

Ainsi l'équation $f(t) = 10$ admet 2 solutions α et β sur [0 ; 5]

D'après la calculatrice, on a $\alpha \approx 0,39$ et $\beta \approx 1,61$

4/ On admet que pour tout réel $t \in [\ 0; 5\ ]$, $f\ ''(t) = (2t - t^2)e^{-0,5t^2+t+2}$

t	0		2		5
$2t - t^2$	0	$+$	0	$-$	
$e^{-0,5t^2+t+2}$			$+$		
$f\ ''(t)$	0	$+$	0	$-$	

$2t - t^2$ est un trinôme dont les racines sont 0 et 2 et $a = -1 < 0$

Ainsi, d'après le signe de $f\ ''(t)$, on en déduit que f est convexe sur [0 ; 2] et concave sur [2 ; 5]

Partie B

Affirmation 1 : La population est modélisée par la fonction f or f est décroissante sur [0 ; 1]

donc **l'affirmation 1 est fausse**

Affirmation 2 : La population de bactéries aura un effectif inférieur à 10000 lorsque $f(t) \leq 10$ c'est-à-dire lorsque t est compris entre α et β or $\beta - \alpha \approx 1,61 - 0,39 \approx 1,22 > 1$ donc **l'affirmation 2 est vraie**

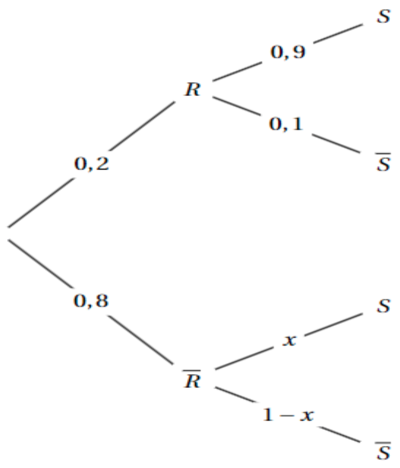
Affirmation 3 : La fonction f est croissante sur [1 ; 5] et devient concave sur [2 ; 5] donc la croissance est ralentie au bout de 2 heures donc **l'affirmation 3 est vraie**

Affirmation 4 : Le maximum de la fonction f est $f(5) \approx 20,1 < 25$ donc la population ne dépassera jamais 25 000 bactéries donc **l'affirmation 4 est vraie**

EXERCICE 3 :

Partie A

1.



2. R et $\overline{R}$ forment une partition de l'univers et d'après la formule des probabilités totales,

$$P(S) = P(S \cap R) + P\left(S \cap \overline{R}\right) \Leftrightarrow 0,82 = P(R)P_R(S) + P\left(\overline{R}\right)P_{\overline{R}}(S)$$
$$\Leftrightarrow 0,82 = 0,2 \times 0,9 + 0,8x$$
$$\Leftrightarrow 0,64 = 0,8x$$
$$\Leftrightarrow x = 0,8$$

3. La probabilité recherchée est $p_S(R) = \frac{p\ (R \cap S\ )}{p\ (S)} = \frac{0,2 \times 0,9}{0,82} = \frac{0,18}{0,82} \approx 0,22$

Partie B

1. **a.** X suit la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,82$.

b. La probabilité qu'au plus trois clients soient satisfaits de leur achat est

$$P(X \leqslant 3) \approx 0,222$$

2. **a.** On répète n fois de façon indépendante la même expérience de Bernoulli de paramètre $p = 0,82$.
On appelle Y la variable aléatoire qui donne le nombre de clients satisfaits de leur achat parmi ces n clients.
Y suit donc la loi binomiale de paramètres n et $p = 0,82$.

Alors, $p_n = P(X = n) = \binom{n}{n} \times 0,82^n \times (1 - 0,82)^{n-n} = 1 \times 0,82^n \times 0,18^0 = 0,82^n$

b. On cherche les entiers n tels que $p_n < 0,01$ avec $p_n = 0,82^n$

or $0,82^{23} \approx 0,0104$ et $0,82^{24} \approx 0,0085$ donc $0,82^n < 0,01$ à partir de $n = 24$

Ainsi $p_n < 0,01$ pour $n \geq 24$

Cela signifie que la probabilité que tous les clients soient satisfaits de leur achat est inférieure à 1% dès qu'il y a au moins 24 clients

EXERCICE 4 :

Partie A

1. $a_1 = a_0 \times \dfrac{85}{100} + 450 = 200 \times \dfrac{85}{100} + 450 = 620$
2. Prendre les 85 % du nombre de collaborateurs en télétravail revient à multiplier par 0,85 ; puis on ajoute 450 donc, pour tout entier naturel n, on a : $a_{n+1} = 0,85a_n + 450$.
3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = a_n - 3000$; on en déduit que $a_n = v_n + 3000$.

   a. • $v_{n+1} = u_{n+1} - 3000 = 0,85u_n + 450 - 3000 = 0,85(v_n + 3000) - 2550$
   $= 0,85v_n + 2550 - 2550 = 0,85v_n$

   • $v_0 = u_0 - 3000 = 200 - 3000 = -2800$

   Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0,85$ et de premier terme $v_0 = -2800$.

   b. On en déduit que, pour tout n, on a $v_n = v_0 \times q^n = -2800 \times 0,85^n$.

   c. Or $u_n = v_n + 3000$ donc, pour tout entier naturel n, $a_n = -2800 \times 0,85^n + 3000$.

4. On a $a_{10} \approx 2448$ $\quad et \quad$ $a_{11} \approx 2531$ donc le nombre de télétravailleurs sera strictement supérieur à 2500 au bout de 11 mois après la mise en place de cette mesure dans l'entreprise.

Partie B

1. Soit f la fonction définie pour tout $x \in [0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{5x+4}{x+2}$.
   f est une fonction rationnelle définie sur $[0\,,\,+\infty[$ donc elle est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$.
   $f'(x) = \dfrac{5 \times (x+2) - (5x+4) \times 1}{(x+2)^2} = \dfrac{5x + 10 - 5x - 4) \times 1}{(x+2)^2} = \dfrac{6}{(x+2)^2}$
   $f'(x) > 0$ sur $[0\,,\,+\infty[$, donc la fonction f est strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.
2. **a.** Soit $\mathscr{P}$ la propriété $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$.

   • **Initialisation**
   $u_0 = 1$ et $u_1 = \dfrac{5 \times u_0 + 4}{u_0 + 1} = \dfrac{5 \times 1 + 4}{1 + 2} = \dfrac{9}{3} = 3$
   $0 \leqslant 1 \leqslant 3 \leqslant 4$, soit $0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 4$, donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

   • **Hérédité**
   On suppose la propriété vraie au rang $n \geqslant 0$, c'est-à-dire $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$.
   La fonction f est strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$ donc sur $[0\,;\,4[$, donc de la relation $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$, on déduit $f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(4)$.
   $f(0) = \dfrac{4}{2} = 2 \geqslant 0$; $f(u_n) = u_{n+1}$; $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$ et $f(4) = \dfrac{24}{6} = 4$
   On a donc : $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 4$, donc la propriété est vraie au rang $n+1$.

   • **Conclusion**
   La propriété est vraie au rang 0, et elle est héréditaire pour tout $n \geqslant 0$, donc, d'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

   On a donc démontré que pour tout n, on a : $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$.

b. • Pour tout n, on a ; $u_n \leqslant u_{n+1}$ donc la suite (u_n) est croissante.

• Pour tout n, on a ; $u_n \leqslant 4$ donc la suite (u_n) est majorée.

La suite (u_n) est croissante et majorée donc, d'après le théorème de la convergence monotone, la suite (u_n) est convergente.

3. On admet que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant 4 - u_n \leqslant 3 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

La suite $\left(3 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right)$ est géométrique de raison $q = \dfrac{1}{2}$; or $-1 < \dfrac{1}{2} < 1$ donc la suite $\left(3 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right)$ converge vers 0.

D'après le théorème des gendarmes, on déduit $\lim\limits_{n \to +\infty} (4 - u_n) = 0$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = 4$.

Cela signifie que le nombre de collaborateurs satisfaits va tendre vers 4 milliers sur les 5 000 que compte l'entreprise.