

BAC BLANC N° 1

Durée : 4 heures

Calculatrice autorisée

Lundi 19 janvier 2026

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

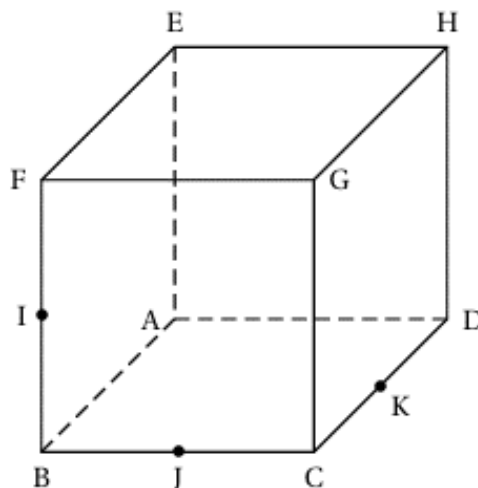
EXERCICE 1 : 5 points

On considère le cube ABCDEFGH de côté 1.

Le point I est le milieu du segment [BF].

Le point J est le milieu du segment [BC].

Le point K est le milieu du segment [CD].



L'espace est rapporté au repère $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$

1. Donner les coordonnées des points A, G, I, J et K dans ce repère.
2. On désigne par M un point du segment [AG] et t le réel de l'intervalle $[0 ; 1]$ tel que $\overrightarrow{AM} = t \overrightarrow{AG}$.
 - a) Montrer que les coordonnées du point M sont $(t ; t ; t)$.
 - b) Démontrer que $MI^2 = 3t^2 - 3t + \frac{5}{4}$.
 - c) Démontrer que la distance MI est minimale pour le point N $(0,5 ; 0,5 ; 0,5)$.
3. Considérant ce point N $(0,5 ; 0,5 ; 0,5)$:
 - a) Démontrer que N appartient au plan (IJK).
 - b) Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{AN}$ est un vecteur normal au plan (IJK).
 - c) En déduire la distance du point A au plan (IJK).

EXERCICE 2 : 5 points

Dans le parc national des Pyrénées, un chercheur travaille sur le déclin d'une espèce protégée dans les lacs de haute-montagne : le « crapaud accoucheur ».

Dans certains lacs des Pyrénées, des truites ont été introduites par l'homme afin de permettre des activités de pêche en montagne. Le chercheur a étudié l'impact de cette introduction sur la population de crapauds accoucheurs d'un lac.

Ses études précédentes l'amènent à modéliser l'évolution de cette population en fonction du temps par la fonction f suivante :

$$f(t) = (0,04t^2 - 8t + 400)e^{0,02t} + 40 \quad \text{pour } t \in [0 ; 120]$$

La variable t représente le temps écoulé, en jour, à partir de l'introduction à l'instant $t = 0$ des truites dans le lac, et $f(t)$ modélise le nombre de crapauds à l'instant t .

1. Déterminer le nombre de crapauds présents dans le lac lors de l'introduction des truites.
2. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0 ; 120]$ et on note f' sa fonction dérivée.

Montrer que pour tout nombre réel t appartenant à l'intervalle $[0 ; 120]$ on a :

$$f'(t) = (0,0008t^2 - 0,08t)e^{0,02t}$$

3. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 120]$, puis dresser le tableau de variations de f sur cet intervalle (on donnera des valeurs approchées au centième).
4. Justifier que l'équation $f(t) = 140$ admet une unique solution α sur $[100 ; 120]$ et donner un encadrement de α par deux entiers consécutifs.
5. On admet que f' est dérivable sur $[0 ; 120]$ et on note f'' sa dérivée seconde.

On admet également que $f''(t) = (1,6 \times 10^{-5} t^2 - 0,08)e^{0,02t}$

Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 120]$

6. Selon cette modélisation :

- a. Déterminer le nombre de jours J nécessaires afin que le nombre de crapauds atteigne son minimum. Quel est ce nombre minimum ?
- b. Au bout de combien de jours après avoir atteint son minimum le nombre de crapauds dépassera-t-il 140 individus ?
- c. A partir de combien de jours la baisse du nombre de crapauds ralentit-elle ?

EXERCICE 3 : 5 points

Les probabilités demandées dans cet exercice seront arrondies à 10^{-3} .

Un laboratoire pharmaceutique vient d'élaborer un nouveau test anti-dopage.

Partie A

Une étude sur ce nouveau test donne les résultats suivants :

- si un athlète est dopé, la probabilité que le résultat du test soit positif est 0,98 (sensibilité du test) ;
- si un athlète n'est pas dopé, la probabilité que le résultat du test soit négatif est 0,995 (spécificité du test).

On fait subir le test à un athlète sélectionné au hasard au sein des participants à une compétition d'athlétisme.

On note D l'évènement « l'athlète est dopé » et T l'évènement « le test est positif ».

On admet que la probabilité de l'évènement D est égale à 0,08.

1. Traduire la situation sous la forme d'un arbre pondéré.
2. Démontrer que $P(T) = 0,083$.
3.
 - a. Sachant qu'un athlète présente un test positif, quelle est la probabilité qu'il soit dopé ?
 - b. Le laboratoire décide de commercialiser le test si la probabilité de l'évènement « un athlète présentant un test positif est dopé » est supérieure ou égale à 0,95.

Le test proposé par le laboratoire sera-t-il commercialisé ? Justifier.

Partie B

Dans une compétition sportive, on admet que la probabilité qu'un athlète contrôlé présente un test positif est 0,103.

1. Dans cette question 1. on suppose que les organisateurs décident de contrôler 5 athlètes au hasard parmi les athlètes de cette compétition.
On note X la variable aléatoire égale au nombre d'athlètes présentant un test positif parmi les 5 athlètes contrôlés.
 - a. Donner la loi suivie par la variable aléatoire X . Préciser ses paramètres.
 - b. Calculer l'espérance $E(X)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
 - c. Quelle est la probabilité qu'au moins un des 5 athlètes contrôlés présente un test positif ?
2. Combien d'athlètes faut-il contrôler au minimum pour que la probabilité de l'évènement « au moins un athlète contrôlé présente un test positif » soit supérieure ou égale à 0,75 ? Justifier.

EXERCICE 4 : 5 points

La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1.$$

1. Calculer, en détaillant les calculs, u_1 et u_2 sous forme de fraction irréductible.

L'extrait, reproduit ci-contre, d'une feuille de calcul réalisée avec un tableur présente les valeurs des premiers termes de la suite (u_n) .

	A	B
1	n	u_n
2	0	1
3	1	1,75
4	2	2,562 5
5	3	3,421 875
6	4	4,316 406 25

2. a. Quelle formule, étirée ensuite vers le bas, peut-on écrire dans la cellule B3 de la feuille de calcul pour obtenir les termes successifs de (u_n) dans la colonne B?
b. Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n) .
3. a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $n \leq u_n \leq n + 1$.
b. En déduire, en justifiant la réponse, le sens de variation et la limite de la suite (u_n) .
c. Démontrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = 1.$$

4. On désigne par (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - n$
- a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{3}{4}$.
b. En déduire que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n + n$.