

Bac blanc n°1

Exercice 1.

$$\begin{aligned} 1) \quad & A(0;0;0) \quad J(1;0,5;0) \\ & G(1;1;1) \quad K(0,5;1;0) \\ & I(1;0;0,5) \end{aligned}$$

0,75

$$2a) \vec{AM} = t \vec{AG}$$

$$\vec{AM} \begin{pmatrix} x_M - x_A \\ y_M - y_A \\ z_M - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_M - 0 \\ y_M - 0 \\ z_M - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_M \\ y_M \\ z_M \end{pmatrix}$$

$$\vec{AG} \begin{pmatrix} 1-0 \\ 1-0 \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad t \vec{AG} \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix}$$

0,5

$$\vec{AM} = t \vec{AG} \text{ donc } \begin{aligned} x_M &= t \\ y_M &= t \\ z_M &= t \end{aligned} \quad \text{donc } M(t; t; t)$$

$$\begin{aligned} b) \quad MI &= \sqrt{(x_I - x_M)^2 + (y_I - y_M)^2 + (z_I - z_M)^2} \\ &= \sqrt{(1-t)^2 + (0-t)^2 + (0,5-t)^2} \\ &= \sqrt{1-2t+t^2+t^2+0,5^2-2 \times 0,5 \times t+t^2} \\ &= \sqrt{3t^2-3t+1,25} \\ &= \sqrt{3t^2-3t+\frac{5}{4}} \end{aligned}$$

0,5

$$MI^2 = 3t^2 - 3t + \frac{5}{4}$$

MI est minimale si MI^2 est minimale.

$$f(t) = 3t^2 - 3t + \frac{5}{4}$$

$$f'(t) = 6t - 3$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow 6t - 3 = 0 \Leftrightarrow 6t = 3 \Leftrightarrow t = 0,5$$

t	-∞	0,5	+∞
f'(t)	-	0	+
f(t)			

MI est minimale pour $t = 0,5$.

Donc MI est minimale pour

$$M(0,5; 0,5; 0,5)$$

$$\text{ou } N(0,5; 0,5; 0,5)$$

0,75

3) a) N appartient au plan (ISK) si et seulement si les vecteurs $\vec{NI}$, $\vec{NJ}$ et $\vec{NK}$ sont coplanaires. Autrement dit s'il existe 2 réels x et y tels que :

$$\vec{NI} = x \vec{NJ} + y \vec{NK}$$

$$\vec{NI} \begin{pmatrix} 1-0,5 \\ 0-0,5 \\ 0,5-0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ -0,5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{NJ} \begin{pmatrix} 1-0,5 \\ 0,5-0,5 \\ 0-0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0 \\ -0,5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{NK} \begin{pmatrix} 0,5-0,5 \\ 1-0,5 \\ 0-0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,5 \\ -0,5 \end{pmatrix}$$

1

$$\begin{cases} 0,5 = x \times 0,5 + y \times 0 \\ -0,5 = x \times 0 + y \times 0,5 \\ 0 = x \times (-0,5) + y \times (-0,5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,5 = 0,5x \\ -0,5 = 0,5y \\ 0 = -0,5x - 0,5y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ -0,5x = 0,5y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ x = -y = -(-1) = 1 \end{cases}$$

Donc $\vec{NI} = \vec{NJ} - \vec{NK}$.
Les vecteurs sont donc coplanaires, les points N, I, J et K aussi donc $N \in (ISK)$.

$$b) \vec{AN} \begin{pmatrix} 0,5-0 \\ 0,5-0 \\ 0,5-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix} \quad \vec{IJ} \begin{pmatrix} 1-1 \\ 0,5-0 \\ 0-0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,5 \\ -0,5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{IK} \begin{pmatrix} 0,5-1 \\ 1-0 \\ 0-0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,5 \\ 1 \\ -0,5 \end{pmatrix}$$

1

$$\vec{AN} \cdot \vec{IJ} = 0,5 \times 0 + 0,5 \times 0,5 + 0,5 \times (-0,5) = 0$$

$$\vec{AN} \cdot \vec{IK} = 0,5 \times (-0,5) + 0,5 \times 1 + 0,5 \times (-0,5) = 0$$

Donc $\vec{AN}$ est orthogonal à $\vec{IJ}$ et $\vec{IK}$ (2 vecteurs non colinéaires) qui dirigent le plan (ISK).
Donc $\vec{AN}$ est normal au plan (ISK).

c) $\vec{AN}$ est normal au plan (ISK) donc (AN) est orthogonale au plan (ISK). N appartient au plan (ISK) donc N est le projeté orthogonal de A sur (ISK). La distance du point A au plan (ISK) est la distance AN.

$$AN = \sqrt{0,5^2 + 0,5^2 + 0,5^2} = \sqrt{0,75} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

0,5

Exercice 2 :

$$1) f(0) = (0,04 \times 0^2 - 8 \times 0 + 400) e^{0,02 \times 0} + 40 = 440 \quad (0,25)$$

Il y a 440 crapauds au départ.

2) f est de la forme $u \times v + k$

$$u(t) = 0,04t^2 - 8t + 400 \quad u'(t) = 0,08t - 8$$

$$v(t) = e^{0,02t} \quad v'(t) = 0,02e^{0,02t}$$

$$f' = u'v + uv'$$

$$f'(t) = (0,08t - 8) e^{0,02t} + (0,04t^2 - 8t + 400) \times 0,02 e^{0,02t} \quad (0,75)$$

$$= (0,08t - 8) e^{0,02t} + (0,0008t^2 - 0,16t + 8) e^{0,02t}$$

$$= (0,08t - 8 + 0,0008t^2 - 0,16t + 8) e^{0,02t}$$

$$= (0,0008t^2 - 0,08t) e^{0,02t}$$

$$3) f'(t) = 0 \Leftrightarrow (0,0008t^2 - 0,08t) e^{0,02t} = 0$$

$$0,0008t^2 - 0,08t = 0 \text{ ou } e^{0,02t} = 0$$

$$t(0,0008t - 0,08) = 0 \text{ pas de solution}$$

$$t = 0 \text{ ou } 0,0008t - 0,08 = 0$$

$$0,0008t = 0,08$$

$$t = \frac{0,08}{0,0008} = 100$$

t	0	100	120
$0,0008t^2 - 0,08t$	0	-	+
$e^{0,02t}$	+	+	+
$f'(t)$	0	-	+
$f(t)$	440	40	216,37

4) Sur $[100; 120]$, f est continue et strictement croissante, Elle prend ses valeurs dans $[40; 216,37]$.

$$140 \in [40; 216,37].$$

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(t) = 140$ admet une unique solution α sur cet intervalle.

Par balayage à la calculatrice, on a

$$115 < \alpha < 116 \quad (0,25)$$

$$5) f''(t) = (1,6 \times 10^{-5} t^2 - 0,08) e^{0,02t}$$

$$f''(t) = 0 \Leftrightarrow (1,6 \times 10^{-5} t^2 - 0,08) e^{0,02t} = 0$$

$$1,6 \times 10^{-5} t^2 - 0,08 = 0 \text{ ou } e^{0,02t} = 0$$

$$1,6 \times 10^{-5} t^2 = 0,08 \quad \text{pas de solution}$$

$$t^2 = \frac{0,08}{1,6 \times 10^{-5}}$$

$$t^2 = 5000$$

$$t = \sqrt{5000} \text{ ou } -\sqrt{5000}$$

$$t = 50\sqrt{2} \text{ ou } t = -50\sqrt{2}$$

t	0	$50\sqrt{2}$	120
$1,6 \times 10^{-5} t^2 - 0,08$	-	0	+
$e^{0,02t}$	+	+	+
$f''(t)$	-	0	+
f	concave		convexe

f est concave sur $[0, 50\sqrt{2}]$ et convexe sur $[50\sqrt{2}, 120]$.

6. a) Au bout de 100 jours, le nombre de crapauds atteint son minimum qui est de 40. (0,5)

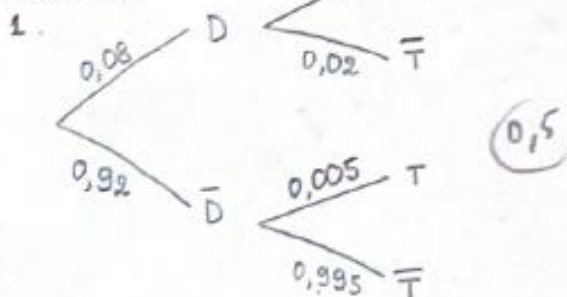
b) Il dépassera 140 individus au bout de 16 jours. $(116 - 100)$ (0,25)

c) la baisse du nombre de crapauds s'arrête au bout de 71 jours.

$$(50\sqrt{2} \approx 70,71)$$

Exercice 3:

Partie A:



2. D et $\bar{D}$ forment une partition de l'univers.

D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(T) &= P(D \cap T) + P(\bar{D} \cap T) \\ &= P(D) \times P_D(T) + P(\bar{D}) \times P_{\bar{D}}(T) \\ &= 0,08 \times 0,98 + 0,92 \times 0,005 \\ &= 0,083. \end{aligned} \quad (1)$$

$$3a) P_T(D) = \frac{P(T \cap D)}{P(T)} = \frac{0,08 \times 0,98}{0,083} \approx 0,945 \quad (0,5)$$

$$b) P_T(D) \approx 0,945 < 0,95$$

Le test proposé par le laboratoire ne sera pas commercialisé. (0,25)

Partie B:

1 a) X suit la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,103$. (0,5)

$$b) E(X) = n \times p = 5 \times 0,103 = 0,515$$

Sur un grand nombre d'échantillons relevés, en moyenne, sur 5 athlètes contrôlés, il y en a 0,5 qui présente un test positif. (0,5)

$$\begin{aligned} c) P(X \geq 1) &= 1 - P(X < 1) \\ &= 1 - P(X = 0) \\ &= 1 - \binom{5}{0} 0,103^0 (1 - 0,103)^{5-0} \\ &\approx 0,419. \end{aligned} \quad (0,75)$$

2. On cherche n tel que

$$P(X \geq 1) \geq 0,75$$

$$\Leftrightarrow 1 - P(X < 1) \geq 0,75$$

$$\Leftrightarrow 1 - P(X = 0) \geq 0,75$$

$$\Leftrightarrow 0,25 \geq P(X = 0)$$

$$\Leftrightarrow 0,25 \geq \binom{n}{0} 0,103^0 (1 - 0,103)^{n-0}$$

$$\Leftrightarrow 0,25 \geq 0,897^n \quad (1)$$

D'après la calculatrice, on trouve $n = 13$.

Il faut contrôler au minimum 13 athlètes.

Remarque :

On peut déterminer le plus petit entier n par calcul de la manière suivante :

$$0,897^n \leq 0,25$$

$$\Leftrightarrow \ln(0,897^n) \leq \ln(0,25)$$

$$\Leftrightarrow n \ln(0,897) \leq \ln(0,25)$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0,25)}{\ln(0,897)}$$

$$\text{or } \frac{\ln(0,25)}{\ln(0,897)} \approx 12,75$$

Donc le plus petit entier n est $n = 13$

Exercice 4 :

$$1. u_1 = \frac{3}{4} u_0 + \frac{1}{4} \times 0 + 1$$

$$= \frac{3}{4} \times 1 + 1$$

$$= \frac{7}{4}$$

(0,25)

$$u_2 = \frac{3}{4} u_1 + \frac{1}{4} \times 1 + 1$$

$$= \frac{3}{4} \times \frac{7}{4} + \frac{1}{4} + 1$$

$$= \frac{21}{16} + \frac{4}{16} + \frac{16}{16}$$

$$= \frac{41}{16}$$

(0,25)

$$2. a) = \frac{3}{4} * B_2 + \frac{1}{4} * A_2 + 1. \quad (0,25)$$

(0,25)

b) (u_n) semble être strictement croissante.

3. a) initialisation:

pour $n=0$, d'une part $n=0$ et $n+1=1$
d'autre part $u_0=1$

$$\text{donc } 0 \leq u_0 \leq 1.$$

L'initialisation est vérifiée.

hérédité:

On suppose qu'il existe un entier naturel k
tel que $k \leq u_k \leq k+1$.

Montrons que $k+1 \leq u_{k+1} \leq k+2$.

$$\text{on a } k \leq u_k \leq k+1$$

$$\frac{3}{4} k \leq \frac{3}{4} u_k \leq \frac{3}{4} (k+1) \quad (1)$$

$$\frac{3}{4} k + \frac{1}{4} k \leq \frac{3}{4} u_k + \frac{1}{4} k \leq \frac{3}{4} k + \frac{3}{4} + \frac{1}{4} k$$

$$k \leq \frac{3}{4} u_k + \frac{1}{4} k \leq k + \frac{3}{4}$$

$$k+1 \leq \frac{3}{4} u_k + \frac{1}{4} k + 1 \leq k + \frac{3}{4} + 1$$

$$k+1 \leq u_{k+1} \leq k + 1,75 \leq k+2$$

L'hérédité est vérifiée.

conclusion:

Pour $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \leq u_n \leq n+1$

$$D) u_{n+1} - u_n = \frac{3}{4} u_n + \frac{1}{4} n + 1 - u_n$$

$$= -\frac{1}{4} u_n + \frac{1}{4} n + 1$$

$$n \leq u_n \leq n+1$$

$$-\frac{1}{4} n \geq -\frac{1}{4} u_n \geq -\frac{1}{4} (n+1)$$

$$-\frac{1}{4} n + \frac{1}{4} n \geq -\frac{1}{4} u_n + \frac{1}{4} n \geq -\frac{1}{4} n + \frac{1}{4} \frac{n+1}{4}$$

$$1 \geq -\frac{1}{4} u_n + \frac{1}{4} n + 1 \geq \frac{3}{4} \quad (0,5)$$

$$\text{donc } u_{n+1} - u_n > 0$$

$$u_{n+1} > u_n.$$

(u_n) est strictement croissante.

* on a $n \leq u_n \leq n+1$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ donc d'après le (0,5)
théorème de comparaison, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

c) on a $n \leq u_n \leq n+1$

$$n > 0 \text{ alors } \frac{n}{n} \leq \frac{u_n}{n} \leq \frac{n+1}{n}$$

$$1 \leq \frac{u_n}{n} \leq 1 + \frac{1}{n} \quad (0,75)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 = 1 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$$

D'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = 1.$$

$$4a) v_n = u_n - n \Leftrightarrow u_n = v_n + n$$

$$v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1)$$

$$= \frac{3}{4} u_n + \frac{1}{4} n + 1 - n - 1$$

$$= \frac{3}{4} u_n - \frac{3}{4} n$$

$$= \frac{3}{4} (v_n + n) - \frac{3}{4} n$$

$$= \frac{3}{4} v_n \text{ donc } (v_n) \text{ est géométrique de raison } q = \frac{3}{4}$$

$$b) v_n = v_0 \times q^n$$

$$= 1 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n \quad (0,25)$$

$$v_0 = u_0 - 0$$

$$v_0 = 1 - 0 = 1$$

(0,25)

$$u_n = v_n + n$$

$$u_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n + n \quad (0,25)$$