

EXERCICE 1 : $f(t) = e^3 - e^{-0,5t^2+t+2}$

Partie A

1/ $e^{-0,5t^2+t+2}$ est de la forme e^u avec $u(t) = -0,5t^2 + t + 2$ d'où $u'(t) = -0,5 \times 2t + 1 = -t + 1$

Or $(e^u)' = u'e^u$ donc $f'(t) = 0 - (-t + 1)e^{-0,5t^2+t+2} = (t - 1)e^{-0,5t^2+t+2}$

2/

t	0	1	5
$t - 1$	-	0	+
$e^{-0,5t^2+t+2}$		+	
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$	$e^3 - e^2 \approx 12,7$		$e^3 - e^{-5,5} \approx 20,1$
		$e^3 - e^{2,5} \approx 7,9$	

3/ Sur $[0 ; 1]$, la fonction f est définie, continue et strictement décroissante. Or 0 est compris entre $f(0) \approx 12,7$ et $f(1) \approx 7,9$ donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(t) = 10$ admet 1 unique solution α sur $[0 ; 1]$.

De même, on montre que l'équation $f(t) = 10$ admet 1 unique solution β sur $[1 ; 5]$.

Ainsi l'équation $f(t) = 10$ admet 2 solutions α et β sur $[0 ; 5]$

D'après la calculatrice, on a $\alpha \approx 0,39$ et $\beta \approx 1,61$

4/ On admet que pour tout réel $t \in [0 ; 5]$, $f''(t) = (2t - t^2)e^{-0,5t^2+t+2}$

t	0	2	5
$2t - t^2$	0	+	0
$e^{-0,5t^2+t+2}$		+	
$f''(t)$	0	+	0

$2t - t^2$ est un trinôme dont les racines sont 0 et 2 et $a = -1 < 0$

Ainsi, d'après le signe de $f''(t)$, on en déduit que f est convexe sur $[0 ; 2]$ et concave sur $[2 ; 5]$

Partie B

Affirmation 1 : La population est modélisée par la fonction f or f est décroissante sur $[0 ; 1]$

donc l'affirmation 1 est fausse

Affirmation 2 : La population de bactéries aura un effectif inférieur à 10000 lorsque $f(t) \leq 10$ c'est-à-dire lorsque t est compris entre α et β or $\beta - \alpha \approx 1,61 - 0,39 \approx 1,22 > 1$ donc l'affirmation 2 est vraie

Affirmation 3 : La fonction f est croissante sur $[1 ; 5]$ et devient concave sur $[2 ; 5]$ donc la croissance est ralentie au bout de 2 heures donc l'affirmation 3 est vraie

Affirmation 4 : Le maximum de la fonction f est $f(5) \approx 20,1 < 25$ donc la population ne dépassera jamais 25 000 bactéries donc l'affirmation 4 est vraie

EXERCICE 2 :

1. a 2. c 3. a 4. a

(les justifications suivantes n'étaient pas exigées)

1. Seul l'algorithme a. convient car pour que la fonction seuil fonctionne, il faut que la boucle while s'exécute tant que $v < 200$ et que le nombre de mois soit augmenté de 1 à chaque exécution de la boucle.

L'algorithme b. renvoie $m=0$ car la boucle while $v > 200$ ne s'exécute jamais car $v=57$

L'algorithme c. calcule la valeur de v au bout de 200 mois

L'algorithme d. renvoie $m = 1$ car le test if $v < 200$ est vrai ($57 < 200$) donc m est augmenté de 1

2. Les vecteurs $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AE} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$ sont colinéaires car $\frac{3}{-2} = -\frac{3}{2} = \frac{3}{-2} = -1,5$ donc les points A, B et E sont alignés

3. On cherche α et β tels que $\overrightarrow{AF} = \alpha \overrightarrow{AB} + \beta \overrightarrow{AC}$ avec $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AF} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, on a alors

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 = -2\alpha - 3\beta \\ -1 = 2\alpha - \beta \\ 0 = -2\alpha - \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = -2\alpha - 3(-2\alpha) \\ -1 = 2\alpha - (-2\alpha) \\ \beta = -2\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = -2\alpha + 6\alpha \\ -1 = 4\alpha \\ \beta = -2\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = 4\alpha \\ \alpha = -\frac{1}{4} \\ \beta = -2 \times (-\frac{1}{4}) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha = -\frac{1}{4} \\ \alpha = -\frac{1}{4} \\ \beta = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{on a donc} \quad \alpha = -\frac{1}{4} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{1}{2}$$

Ainsi $\overrightarrow{AF} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ ce qui prouve que le point F appartient au plan (ABC)

4. $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OH}$

$$= \overrightarrow{AO} + 3\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$$

$$= -\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OA} - (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}) - (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC})$$

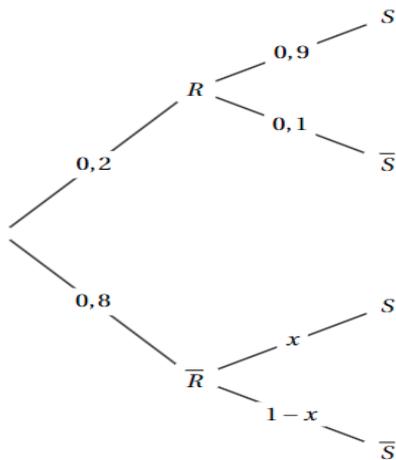
$$= 2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{AC}$$

$$= -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \quad \text{ce qui prouve que les vecteurs } \overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ sont coplanaires}$$

EXERCICE 3 :

Partie A

1.



2. R et \bar{R} forment une partition de l'univers et d'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(S) &= P(S \cap R) + P(S \cap \bar{R}) \Leftrightarrow 0,82 = P(R)P_R(S) + P(\bar{R})P_{\bar{R}}(S) \\ &\Leftrightarrow 0,82 = 0,2 \times 0,9 + 0,8x \\ &\Leftrightarrow 0,64 = 0,8x \\ &\Leftrightarrow x = 0,8 \end{aligned}$$

3. La probabilité recherchée est $p_S(R) = \frac{p(R \cap S)}{p(S)} = \frac{0,2 \times 0,9}{0,82} = \frac{0,18}{0,82} \approx 0,22$

Partie B

1. a. X suit la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,82$.

b. La probabilité qu'au plus trois clients soient satisfaits de leur achat est

$$P(X \leq 3) \approx 0,222$$

2. a. On répète n fois de façon indépendante la même expérience de Bernoulli de paramètre $p = 0,82$.

On appelle Y la variable aléatoire qui donne le nombre de clients satisfaits de leur achat parmi ces n clients.

Y suit donc la loi binomiale de paramètres n et $p = 0,82$.

$$\text{Alors, } p_n = P(X = n) = \binom{n}{n} \times 0,82^n \times (1 - 0,82)^{n-n} = 1 \times 0,82^n \times 0,18^0 = 0,82^n$$

b. On cherche les entiers n tels que $p_n < 0,01$ avec $p_n = 0,82^n$

or $0,82^{23} \approx 0,0104$ et $0,82^{24} \approx 0,0085$ donc $0,82^n < 0,01$ à partir de $n = 24$

Ainsi $p_n < 0,01$ pour $n \geq 24$

Cela signifie que la probabilité que tous les clients soient satisfaits de leur achat est inférieure à 1% dès qu'il y a au moins 24 clients

EXERCICE 4 :

Partie A

- $a_1 = a_0 \times \frac{85}{100} + 450 = 200 \times \frac{85}{100} + 450 = 620$
- Prendre les 85 % du nombre de collaborateurs en télétravail revient à multiplier par 0,85; puis on ajoute 450 donc, pour tout entier naturel n , on a : $a_{n+1} = 0,85a_n + 450$.
- On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = a_n - 3000$; on en déduit que $a_n = v_n + 3000$.
 - $v_{n+1} = u_{n+1} - 3000 = 0,85u_n + 450 - 3000 = 0,85(v_n + 3000) - 2550$
 $= 0,85v_n + 2550 - 2550 = 0,85v_n$
 - $v_0 = u_0 - 3000 = 200 - 3000 = -2800$Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0,85$ et de premier terme $v_0 = -2800$.
 - On en déduit que, pour tout n , on a $v_n = v_0 \times q^n = -2800 \times 0,85^n$.
 - Or $u_n = v_n + 3000$ donc, pour tout entier naturel n , $a_n = -2800 \times 0,85^n + 3000$.

4. On a $a_{10} \approx 2448$ et $a_{11} \approx 2531$ donc le nombre de télétravailleurs sera strictement supérieur à 2500 au bout de 11 mois après la mise en place de cette mesure dans l'entreprise.

Partie B

- Soit f la fonction définie pour tout $x \in [0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{5x+4}{x+2}$.
 f est une fonction rationnelle définie sur $[0; +\infty[$ donc elle est dérivable sur $[0; +\infty[$.
$$f'(x) = \frac{5 \times (x+2) - (5x+4) \times 1}{(x+2)^2} = \frac{5x+10-5x-4}{(x+2)^2} = \frac{6}{(x+2)^2}$$

 $f'(x) > 0$ sur $[0; +\infty[$, donc la fonction f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.
- Soit \mathcal{P} la propriété $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$.
 - Initialisation**
 $u_0 = 1$ et $u_1 = \frac{5 \times u_0 + 4}{u_0 + 1} = \frac{5 \times 1 + 4}{1 + 2} = \frac{9}{3} = 3$
 $0 \leq 1 \leq 3 \leq 4$, soit $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 4$, donc la propriété est vraie pour $n = 0$.
 - Hérédité**
On suppose la propriété vraie au rang $n \geq 0$, c'est-à-dire $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$.
La fonction f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$ donc sur $[0; 4[$, donc de la relation $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$, on déduit $f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(4)$.
 $f(0) = \frac{4}{2} = 2 \geq 0$; $f(u_n) = u_{n+1}$; $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$ et $f(4) = \frac{24}{6} = 4$
On a donc : $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 4$, donc la propriété est vraie au rang $n+1$.
 - Conclusion**
La propriété est vraie au rang 0, et elle est héréditaire pour tout $n \geq 0$, donc, d'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geq 0$.

On a donc démontré que pour tout n , on a : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$.

- b.**
- Pour tout n , on a ; $u_n \leq u_{n+1}$ donc la suite (u_n) est croissante.
 - Pour tout n , on a ; $u_n \leq 4$ donc la suite (u_n) est majorée.

La suite (u_n) est croissante et majorée donc, d'après le théorème de la convergence monotone, la suite (u_n) est convergente.

- 3.** On admet que pour tout entier naturel n , $0 \leq 4 - u_n \leq 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

La suite $\left(3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$ est géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$; or $-1 < \frac{1}{2} < 1$ donc la suite $\left(3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$ converge vers 0.

D'après le théorème des gendarmes, on déduit $\lim_{n \rightarrow +\infty} (4 - u_n) = 0$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = 4$.

Cela signifie que le nombre de collaborateurs satisfaits va tendre vers 4 milliers sur les 5 000 que compte l'entreprise.