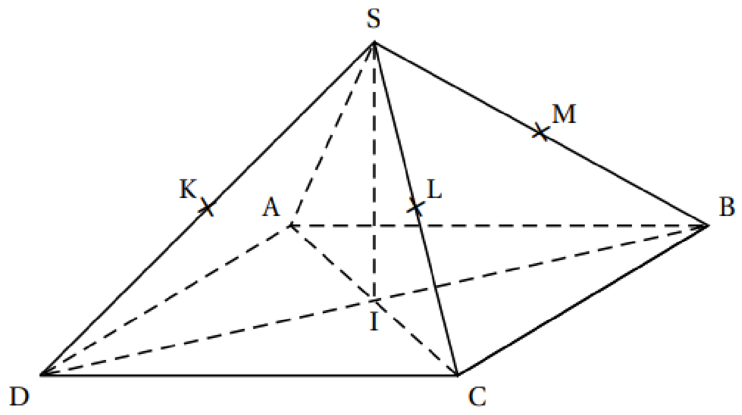
Terminales	**MATHEMATIQUES** : EPREUVE DE SPECIALITE	Sujet 2
	16 JANVIER 2024	
Durée : 4 h	*Calculatrice autorisée*	

EXERCICE 1 : 4 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Pour répondre indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.



SABCD est une pyramide régulière à base carrée ABCD dont toutes les arêtes ont la même longueur.
Le point I est le centre du carré ABCD.
On suppose que : IC = IB = IS = 1.
Les points K, L et M sont les milieux respectifs des arêtes [SD], [SC] et [SB].

1. Les droites suivantes ne sont pas coplanaires :

a. (DK) et (SD) **b.** (AS) et (IC) **c.** (AC) et (SB) **d.** (LM) et (AD)

Pour les 2 questions suivantes, on se place dans le repère de l'espace $\left(I ; \overrightarrow{IC}, \overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IS}\right)$.

Dans ce repère, on donne les coordonnées des points suivants :

I (0 ; 0 ; 0) A (-1 ; 0 ; 0) B (0 ; 1 ; 0) C (1 ; 0 ; 0) D (0 ; -1 ; 0) S (0 ; 0 ; 1)

2. Les coordonnées du milieu N de [KL] sont :

a. $\left(\frac{1}{4} ; \frac{1}{4} ; \frac{1}{4}\right)$ **b.** $\left(\frac{1}{4} ; -\frac{1}{4} ; \frac{1}{2}\right)$ **c.** $\left(-\frac{1}{4} ; \frac{1}{4} ; \frac{1}{2}\right)$ **d.** $\left(-\frac{1}{2} ; \frac{1}{2} ; 1\right)$

3. On considère le point H défini par $\overrightarrow{IH} = 3\,\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC}$

a. $\overrightarrow{AH}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires **b.** H a pour coordonnées (-3 ; -1 ; 0) **c.** $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{BC}$ **d.** Les points A, B , C et H sont alignés

4. On considère deux suites (u_n) et (v_n) à termes strictement positifs telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et (v_n) converge vers 0. On peut affirmer que :

a. la suite $\left(\frac{1}{v_n}\right)$ converge.

b. la suite $\left(\frac{v_n}{u_n}\right)$ converge

c. la suite (u_n) est croissante

d. $\lim\limits_{n\to+\infty} (-u_n)^n = -\infty$

EXERCICE 2 : 5 points

Dans un souci d'améliorer sa politique en matière de développement durable, une entreprise a réalisé une enquête statistique sur sa production de déchets. Dans cette enquête, les déchets sont classés en trois catégories :

- 69% des déchets sont minéraux et non dangereux;
- 28% des déchets sont non minéraux et non dangereux;
- les déchets restants sont des déchets dangereux.

Cette enquête statistique nous apprend également que :

- 73% des déchets minéraux et non dangereux sont recyclables;
- 49% des déchets non minéraux et non dangereux sont recyclables;
- 35% des déchets dangereux sont recyclables.

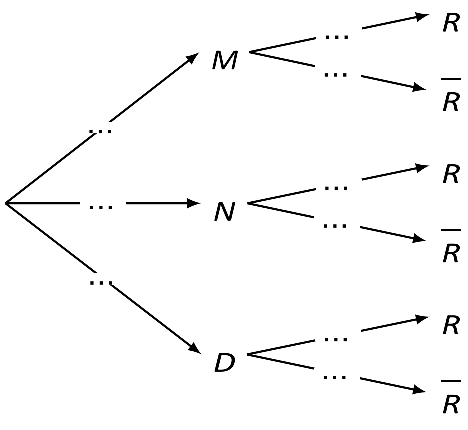
Les parties A *et* B *sont indépendantes et peuvent être traitées séparément.*

Partie A

Dans cette entreprise, on prélève au hasard un déchet. On considère les évènements suivants :

- M : «Le déchet prélevé est minéral et non dangereux»;
- N : «Le déchet prélevé est non minéral et non dangereux»;
- D : «Le déchet prélevé est dangereux»;
- R : «Le déchet prélevé est recyclable». On note $\overline{R}$ l'évènement contraire de l'évènement R.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous représentant la situation de l'énoncé.



2. Justifier que la probabilité que le déchet soit dangereux et recyclable est égale à 0,0105.
3. Déterminer la probabilité $p(M \cap \overline{R})$ et interpréter la réponse obtenue dans le contexte de l'exercice.
4. Démontrer que la probabilité de l'évènement R est $P(R) = 0{,}6514$.
5. On suppose que le déchet prélevé est recyclable. Déterminer la probabilité que ce déchet soit non minéral et non dangereux. *On donnera la valeur arrondie au dix-millième.*

Partie B

On rappelle que la probabilité qu'un déchet prélevé au hasard soit recyclable est égale à 0,6514.

1. Afin de contrôler la qualité de la collecte dans l'entreprise, on prélève un échantillon de 20 déchets pris au hasard dans la production. On suppose que le stock est suffisamment important pour assimiler le prélèvement de cet échantillon à un tirage avec remise.

On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de déchets recyclables dans cet échantillon.

a. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.

b. Donner la probabilité que l'échantillon contienne exactement 14 déchets recyclables. *On donnera la valeur arrondie au dix-millième.*

2. Dans cette question, on prélève désormais n déchets, où n désigne un entier naturel strictement positif.

a. Donner l'expression en fonction de n de la probabilité p_n qu'aucun déchet de cet échantillon ne soit recyclable.

b. Déterminer la valeur de l'entier naturel n à partir de laquelle la probabilité qu'au moins un déchet du prélèvement soit recyclable est supérieure ou égale à 0,9999.

EXERCICE 3 : 5 points

Dans une boulangerie, les baguettes sortent du four à une température de 225 °C.

On s'intéresse à l'évolution de la température d'une baguette après sa sortie du four. On admet qu'on peut modéliser cette évolution à l'aide d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle [0 ; 10]. Dans cette modélisation, $f(t)$ représente la température en degré Celsius de la baguette au bout de la durée t, exprimée en heure, après la sortie du four.

Ainsi, $f(0,5)$ représente la température d'une baguette une demi-heure après la sortie du four.

Dans tout l'exercice, la température ambiante de la boulangerie est maintenue à 25 °C.

On admet que la fonction f est définie sur l'intervalle [0 ; 10] par $f(t) = 200e^{-6t} + 25$.

1/ Par expérience, on observe que la température d'une baguette sortant du four :

— décroît;
— est à la température ambiante au bout de 10 heures

La fonction f fournit-elle un modèle en accord avec ces observations ?

2/ Pour mettre les baguettes en rayon, le boulanger attend que leur température soit inférieure ou égale à 40 °C. On note T_0 le temps d'attente minimal entre la sortie du four d'une baguette et sa mise en rayon.

a/ Justifier que l'équation $f(t) = 40$ admet une unique solution T_0 dans [0 ; 10].

b/ Donner une valeur approchée de T_0 sous forme d'un nombre entier de minutes.

3/ La fonction f est-elle convexe sur [0 ; 10] ? La décroissance de la température est-elle alors accélérée ou ralentie ?

EXERCICE 4 : 6 points

Au début de l'année 2021, une colonie d'oiseaux comptait 40 individus. L'observation conduit à modéliser l'évolution de la population par la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 & = & 40 \\ u_{n+} & = & 0{,}008u_n(200-u_n) \end{cases}$$

où u_n désigne le nombre d'individus au début de l'année $(2021+n)$.

1. Donner une estimation, selon ce modèle, du nombre d'oiseaux dans la colonie au début de l'année 2022.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 100]$ par $f(x) = 0{,}008x(200-x)$.

2. Résoudre dans l'intervalle $[0; 100]$ l'équation $f(x) = x$.

3. **a.** Démontrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0; 100]$ et dresser son tableau de variations.

b. En remarquant que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$ démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 100.$$

Remarque : on pourra être amené à utiliser le sens de variation de la fonction f

c. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

d. Déterminer la limite ℓ de la suite (u_n). Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

4. On considère l'algorithme suivant :

```
def seuil(p) :
    n=0
    u = 40
    while u < p :
      n =n+1
      u = 0.008*u*(200-u)
    return(n+2021)
```

L'exécution de seuil(100) ne renvoie aucune valeur. Expliquer pourquoi à l'aide de la tion 3.