Composition : Sujet 2

Exercice 1 :

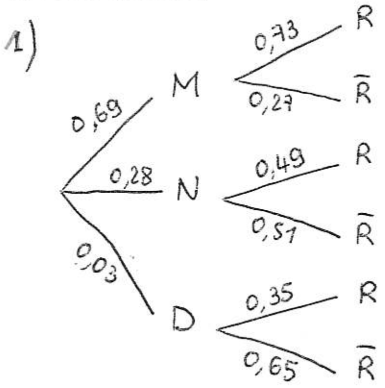
1. c 3. a

2. b 4. b

Exercice 2 :

Partie A :

1)



2) $P(D \cap R) = P(D) \times P_D(R) = 0{,}03 \times 0{,}35 = 0{,}0105$

3) $P(M \cap \bar{R}) = P(M) \times P_M(\bar{R}) = 0{,}69 \times 0{,}27 = 0{,}1863$

↳ proba que le déchet soit minéral et non dangereux et non recyclable.

4) M, N et D forment une partition de l'univers D'après la formule des probabilités totales,

$$P(R) = P(M \cap R) + P(N \cap R) + P(D \cap R)$$
$$= P(M) \times P_M(R) + P(N) \times P_N(R) + 0{,}0105$$
$$= 0{,}69 \times 0{,}73 + 0{,}28 \times 0{,}49 + 0{,}0105$$
$$= 0{,}5037 + 0{,}1372 + 0{,}0105$$
$$= 0{,}6514.$$

5) $P_R(N) = \dfrac{P(N \cap R)}{P(R)} = \dfrac{0{,}1372}{0{,}6514} \approx 0{,}2106.$

Partie B :

1. a) X suit une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0{,}6514$.

b) $P(X = 14) = \binom{20}{14} 0{,}6514^{14} \times (1-0{,}6514)^6 \approx 0{,}1723.$

2. a) $P(X = 0) = \binom{n}{0} 0{,}6514^0 \times (1-0{,}6514)^n = 1 \times 1 \times 0{,}3486^n = 0{,}3486^n.$

b) $P(X \geq 1) \geq 0{,}9999$

$\Leftrightarrow 1 - P(X < 1) \geq 0{,}9999$

$\Leftrightarrow 1 - P(X = 0) \geq 0{,}9999$

$\Leftrightarrow -P(X=0) \geq 0{,}9999 - 1$

$\Leftrightarrow -P(X=0) \geq -0{,}0001$

$\Leftrightarrow P(X=0) \leq 0{,}0001$

$\Leftrightarrow 0{,}3486^n \leq 0{,}0001$ or $0{,}3486^8 \approx 0{,}000218$

et $0{,}3486^9 \approx 0{,}000076$ donc $n = 9$

Exercice 3

1) • $f(t) = 200e^{-6t} + 25$

$f'(t) = 200 \times (-6e^{-6t}) = -1200e^{-6t}$

$\left.\begin{array}{l} e^{-6t} > 0 \\ -1200 < 0 \end{array}\right\}$ $f'(t) < 0$ donc f décroit.

• $f(10) = 200e^{-6\times 10} + 25 = 25$) température ambiante

La fonction f fournit un modèle en accord avec les observations.

2) a)

t	0	T_0	10
$f(t)$	225	40	25

f est définie, continue et strictement ↘ sur $[0;10]$. Or 40 est compris entre $f(0) = 225$ et $f(10) = 25$.
D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(t) = 40$ admet une unique solution T_0 sur $[0;10]$

b) $0 < T_0 < 10$

Par balayage à la calculatrice,

$0 < T_0 < 1$

$0,4 < T_0 < 0,5$

$0,43 < T_0 < 0,44$

$\times 60 \downarrow$ $\qquad \downarrow \times 60$

25,8 min $\qquad$ 26,4 min

$T_0 \approx 26$ minutes.

3) $f''(t) = -1200 \times (-6e^{-6t}) = 7200e^{-6t}$

$\left.\begin{array}{l} e^{-6t} > 0 \\ 7200 > 0 \end{array}\right\}$ $f''(t) > 0$ donc f est convexe sur $[0;10]$.

La fonction f est décroissante et f est convexe donc la décroissance de la température est ralentie.

Exercice 4 :

1) En 2022, on calcule $u_1 = 0{,}008 u_0 (200 - u_0) = 0{,}008 \times 40 (200 - 40)$

$$u_1 = 0{,}32 \times 160 = 51{,}2.$$

Au début de 2022, on peut estimer qu'il y aura 51 animaux.

2) $f(x) = x \iff 0{,}008x(200-x) = x$

$\iff 1{,}6x - 0{,}008x^2 - x = 0$

$\iff 0{,}6x - 0{,}008x^2 = 0$

$\iff x(0{,}6 - 0{,}008x) = 0$

$\iff x = 0$ ou $0{,}6 - 0{,}008x = 0$

$\iff x = 0$ ou $0{,}6 = 0{,}008x$

$\iff x = 0$ ou $x = 75$. $\qquad S = \{0 ; 75\}$.

3) a) $f(x) = 0{,}008x(200-x) = 1{,}6x - 0{,}008x^2$

$f'(x) = 1{,}6 - 0{,}016x$

$f'(x) = 0 \iff 1{,}6 - 0{,}016x = 0$

$\iff 1{,}6 = 0{,}016x$

$\iff \dfrac{1{,}6}{0{,}016} = x$

$\iff x = 100$

x	0		100
$f'(x)$		$+$	0
$f(x)$	0	$\nearrow$	80

$a < 0$

b) Initialisation : pour $n = 0$, d'une part $u_0 = 40$

et $u_1 = 51{,}2$

donc $0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 100$ $\qquad$ l'initialisation est vérifiée.

Hérédité : Supposons qu'il existe un entier naturel k tel que $0 \leqslant u_k \leqslant u_{k+1} \leqslant 100$.

Montrons que $0 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_{k+2} \leqslant 100$.

on sait que $0 \leqslant u_k \leqslant u_{k+1} \leqslant 100$

$f(0) \leqslant f(u_k) \leqslant f(u_{k+1}) \leqslant f(100)$ $\qquad$ car f est croissante sur $[0;100]$

$0 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_{k+2} \leqslant 80 \leqslant 100$

l'hérédité est vérifiée.

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 100$.

c) $u_n \leqslant u_{n+1}$ donc (u_n) est croissante

$u_n < 100$ donc (u_n) est majorée par 100 $\Big\}$ (u_n) converge vers un réel ℓ.

d) $u_{n+1} = f(u_n)$ or f est continue et (u_n) converge vers ℓ donc, d'après le théorème du point fixe, ℓ est solution de l'équation $f(\ell) = \ell$

D'après la question 2, $f(\ell) = \ell \Leftrightarrow \ell = 0$ ou $\ell = 75$.

impossible car $u_0 = 40$ donc $\ell = 75$.

Dans un grand nombre d'années, le nombre d'oiseaux stagnera à 75

4) $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 75$ donc pour tt $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant 75$

les termes de la suite (u_n) n'atteindront jamais 100.

Le programme ne s'arrêtera jamais.