Exercice 1 (5 points)

1. F(3; 0; 1), H(0; 1; 1), M(1,5; 1; 0).

2. **a.** Soit $\overrightarrow{\text{HF}}\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{MF}}\begin{pmatrix}1,5\\-1\\1\end{pmatrix}$. Ces deux vecteurs ne sont manifestement pas colinéaires.

On a $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\text{HF}} = 6-6+0=0$

On a $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\text{MF}} = 3-6+3=0$.

Conclusion : le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (HMF), il est donc normal à ce plan.

b. On sait qu'alors :

$X(x\,;\,y\,;\,z)\in(\text{MHF}) \iff 2x+6y+3z+d=0$. Ainsi par exemple :

$\text{H}(x\,;\,y\,;\,z)\in(\text{MHF}) \iff 0+6+3+d=0 \iff d=-9$, donc finalement :

$$X(x\,;\,y\,;\,z)\in(\text{MHF}) \iff 2x+6y+3z-9=0.$$

c. Le plan $\mathscr{P}$ a par exemple pour vecteur normal $\overrightarrow{p}\begin{pmatrix}5\\15\\-3\end{pmatrix}$ et ce vecteur n'est pas colinéaire au vecteur $\overrightarrow{n}$, (on a bien $2\times\dfrac{5}{2}=5$, $6\times\dfrac{5}{2}=15$, mais $3\times\dfrac{5}{2}\neq-3$) donc les deux plans ne sont pas parallèles.

3. On a D(0; 1; 0) et G(3; 1; 1), d'où $\overrightarrow{\text{DG}}\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$.

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 3t\\ y &=& 1\\ z &=& t\end{array}\right.\quad t\in\mathbb{R}.$$

4. Si la droite coupe le plan en un point N, les coordonnées de ce point vérifient les équations de la droite et celle du plan soit le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 3t\\ y &=& 1\\ z &=& t\\ 2x+6y+3z-9 &=& 0\end{array}\right.\quad t\in\mathbb{R}.$$

En remplaçant x, y et z par leurs valeurs en fonction de t dans la dernière équation, on obtient :

$6t+6+3t-9=0 \iff 9t-3=0 \iff 3t-1=0 \iff t=\dfrac{1}{3}$. Les coordonnées de N sont donc $\left(3\times\frac{1}{3}\,;\,1\,;\,\frac{1}{3}\right)$, soit $\text{N}\left(1\,;\,1\,;\,\dfrac{1}{3}\right)$.

5. • On vérifie d'abord que R appartient au plan (HMF) :

$R\left(3\,;\,\frac{1}{4}\,;\,\frac{1}{2}\right) \in (HMF) \iff 6+\frac{3}{2}+\frac{3}{2}-9=0 \iff 6+3-9=0$ ce qui est vrai.

• On vérifie maintenant que le vecteur $\overrightarrow{GR}$ est bien un vecteur normal au plan (HMF) :

On a $\overrightarrow{GR}\begin{pmatrix}3-3\\ \frac{1}{4}-1\\ \frac{1}{2}-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ -\frac{3}{4}\\ -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$. Or ce vecteur n'est manifestement pas colinéaire au vecteur connu $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\6\\3\end{pmatrix}$: pour que $\overrightarrow{n}$ soit colinéaire au vecteur $\overrightarrow{GR}$ il faudrait que sa première coordonnée soit égale à 0, ce qui n'est pas le cas.

Conclusion : le point R n'est pas le projeté orthogonal du point G sur le plan (HMF).

Exercice 2 (4 points)

1.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0\\[2ex] \lim\limits_{x\to-\infty} -4 = -4\end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} e^x - 4 = -4\\[2ex] \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty\end{array}\right\} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \quad \text{(par produit)}$$

donc la courbe représentative de la fonction f n'admet pas d'asymptote horizontale en $-\infty$.

Affirmation FAUSSE

2. On a $g(x) = x^2e^x$ d'où, $g'(x) = 2xe^x + x^2e^x = (x^2+2x)e^x$

et $g''(x) = (2x+2)e^x + (x^2+2x)e^x = (x^2+4x+2)e^x$

or pour x^2+4x+2, $\Delta = 4^2 - 4\times1\times2 = 8$,

donc il y a 2 racines $x_1 = \frac{-4-\sqrt{8}}{2} = -2-\sqrt{2}$ et $x_2 = \frac{-4+\sqrt{8}}{2} = -2+\sqrt{2}$

on a alors,

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
x^2+4x+2		$+$	0	$-$	0	$+$	
e^x				$+$			
$g''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi, $g''(x)$ s'annule en changeant de signe pour x_1 et x_2 donc la courbe représentative de la fonction g admet 2 points d'inflexion. **Affirmation VRAIE**

3. Une équation de la tangente T à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 1 est $y = f'(1)(x-1) + f(1)$

or on a $f(x) = x^2 - 4x + 3\ln(2x-1)$ donc $f(1) = 1^2 - 4\times 1 + 3\ln(2\times 1 - 1) = -3$

et $f'(x) = 2x - 4 + 3\times\frac{2}{2x-1} = 2x - 4 + \frac{6}{2x-1}$ d'où $f'(1) = 2\times 1 - 4 + \frac{6}{2\times 1-1} = 4$

ainsi T a pour équation $y = 4(x-1) - 3 = 4x - 4 - 3 = 4x - 7$ **Affirmation FAUSSE**

4. On sait que $w_n = t_n - 10$ *avec* $t_{n+1} = -0{,}8t_n + 18$

Alors, pour tout entier naturel n,
$$\begin{aligned} w_{n+1} &= t_{n+1} - 10 \\ &= -0{,}8t_n + 18 - 10 \\ &= -0{,}8t_n + 8 \\ &= -0{,}8(w_n + 10) + 8 \\ &= -0{,}8w_n - 8 + 8 \\ &= -0{,}8w_n \end{aligned}$$

donc la suite (w_n) est géométrique de raison $q = -0{,}8$. **Affirmation VRAIE**

Exercice 3 (6 points)

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = x^2 - x\,ln(x)$.

Partie A :

1. • Limite en 0 :

$\lim_{x\to 0} x^2 = 0$ et, d'après la propriété des croissances comparées : $\lim_{x\to 0} x\ln(x) = 0$

Par limite de la somme, on a donc : $\lim_{x\to 0} x^2 - x\ln(x) = 0$

• Limite en $+\infty$:

$f(x) = x^2 - x\ln(x) = x^2\left(1 - \frac{\ln(x)}{x}\right)$

Par croissances comparées $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x} = 0$ donc, par limite de la somme, $\lim_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{\ln(x)}{x}\right) = 1$

De plus $\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$, donc, par limite du produit, $\lim_{x\to+\infty} x^2\left(1 - \frac{\ln(x)}{x}\right) = +\infty$

2. Pour tout réel x strictement positif, on a : $f'(x) = 2x - 1\times\ln(x) - x\times\frac{1}{x} = 2x - 1 - \ln(x)$.

3. Pour tout réel x strictement positif, on a : $f''(x) = 2 - 0 - \frac{1}{x} = \frac{2x}{x} - \frac{1}{x} = \frac{2x-1}{x}$.

4. Déterminons le signe de $2x-1$:

$$\begin{aligned}2x-1>0 &\iff 2x>1\\ &\iff x>\frac{1}{2}\end{aligned}$$

L'image pertinente est : (les limites aux bornes ne sont pas attendues)

$f'\left(\frac{1}{2}\right)=2\times\frac{1}{2}-1-\ln\left(\frac{1}{2}\right)=1-1+\ln(2)=\ln(2)$

On a donc :

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
signe de $2x-1$		$-$	0	$+$	
signe de x	0	$+$		$+$	
signe de $f''(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	
variations de f'	$\|$	$\searrow$	$\ln(2)$	$\nearrow$	

5. Le minimum de la fonction f' sur $]0\,;\,+\infty[$ est donc $\ln(2)$ qui est strictement positif, donc, sur $]0\,;\,+\infty[$, $f'(x)>0$ et donc, la fonction f est strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$.

Partie B :

1. Pour tout réel x strictement positif, on a : $g'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$.

   Déterminons le signe de $x-1$:

   $x-1>0 \iff x>1$

   L'image pertinente est : (les limites aux bornes ne sont pas attendues)

   $g(1)=1-\ln(1)=1-0=1$

   On a donc :

x	0		1		$+\infty$
signe de $x-1$		$-$	0	$+$	
signe de x	0	$+$		$+$	
signe de $g'(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	
variations de g	$\|$	$\searrow$	1	$\nearrow$	

2. $$\begin{aligned}f(x)=x &\iff x=x^2-x\ln(x)\\ &\iff 0=x^2-x-x\ln(x)\\ &\iff 0=x(x-1-\ln(x))\\ &\iff 0=x-1-\ln(x)\quad \text{car } x>0 \quad \text{donc } x\neq 0\\ &\iff 1=x-\ln(x)\\ &\iff 1=g(x)\\ &\iff x=1\end{aligned}$$

   L'équation $f(x)=x$ admet une unique solution sur $]0\,;\,+\infty[$, cette solution est $x=1$.

Partie C : Étude d'une suite récurrente

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = f(u_n) = u_n^2 - u_n \ln(u_n).$$

1. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.

   Initialisation : Calculons u_1. $u_1 = f(u_0) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{\ln(2)}{2} \approx 0,597$.

   On constate que l'inégalité est vraie pour $n = 0$, on a bien : $\frac{1}{2} \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 1$.

   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, tel que $\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.

   Montrons que l'inégalité est vraie au rang suivant :

   Par hypothèse de récurrence on a :

   $\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1 \Longrightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(1)$

   car f est strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$

   $\Longrightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 1$

   car f est la fonction de récurrence de la suite (u_n)

   $\Longrightarrow \frac{1}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 1$

   car $f\left(\frac{1}{2}\right) \approx 0,60 > \frac{1}{2}$

   Conclusion : Les inégalités sont vraies au rang 0, et si elle sont vraies au rang n naturel, elles sont vraies au rang suivant $n+1$, donc, en vertu du principe de récurrence, on a :

   $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.

2. On a notamment :

   - $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1}$. La suite (u_n) est donc croissante.
   - $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant 1$. La suite (u_n) est donc bornée par $\frac{1}{2}$ et 1.

   La suite étant croissante et majorée, on en déduit qu'elle est convergente, vers une limite ℓ vérifiant $\frac{1}{2} \leqslant \ell \leqslant 1$

3. La suite (u_n) est une suite convergente, définie par récurrence par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, où la fonction f est continue (car dérivable) sur $]0\,;\,+\infty[$, intervalle qui contient la limite ℓ de la suite.

   D'après le théorème « du point fixe », on en déduit que la limite ne peut être qu'une solution de l'équation $f(x) = x$ dans l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

   D'après la question **2.** de la **Partie B**, cette équation n'a qu'une solution dans l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$: 1.

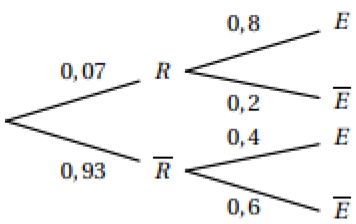
   La suite (u_n) converge donc vers $\ell = 1$.

Exercice 4 (5 points)

Partie A

1. D'après l'énoncé, on a : $p(R) = 0,07$; $p_R(E) = 0,8$ et $p_{\overline{R}}(E) = 0,4$

   On en déduit l'arbre pondéré modélisant la situation :



   et on a : $p(R \cap E) = p(R) \times p_R(E) = 0,07 \times 0,8 = 0,056$

2. R et $\overline{R}$ constituent une partition de l'univers.

   D'après la loi des probabilités totales : $p(E) = p(R \cap E) + p\left(\overline{R} \cap E\right)$

   donc $p(E) = p(R) \times p_R(E) + p(\overline{R}) \times p_{\overline{R}}(E)$

   donc $p(E) = 0,056 + 0,93 \times 0,4 = 0,428$.

3. On cherche la probabilité que le joueur obtienne un objet rare sachant qu'il a tiré une épée.

   $p_E(R) = \dfrac{p(R \cap E)}{p(E)} = \dfrac{0,056}{0,428} \approx 0,131$ au millième près.

Partie B

1. Les 30 défis constituent une répétition d'expériences aléatoires identiques et indépendantes à deux issues, il s'agit donc d'un schéma de Bernoulli. La variable aléatoire X suit donc la loi binomiale $\mathcal{B}(30\,; 0,07)$ de paramètres $n = 30$ et $p = 0,07$

   Son espérance est $E(X) = n \times p = 30 \times 0,07 = 2,1$

2. $p(X < 6) = p(X \leqslant 5) \approx 0,984$ au millième près.

3. On cherche le plus grand entier k tel que $p(X \geqslant k) \geqslant 0,5$

   $p(X \geqslant k) \geqslant 0,5 \iff 1 - p(X < k) \geqslant 0,5 \iff -p(X < k) \geqslant -0,5 \iff$

   $p(X < k) \leqslant 0,5 \iff p(X \leqslant k-1) \leqslant 0,5$.

   En utilisant la calculatrice on trouve : $p(X \leqslant 1) \approx 0,3694$ et $p(X \leqslant 2) \approx 0,6487$

   La plus grande valeur de k telle que $p(X \geqslant k) \geqslant 0,5$ est donc $k = 2$.

   Après avoir remporté 30 défis, dans au moins 50 % des cas, le joueur aura tiré au moins 2 objets rares.

4. On cherche le plus petit entier naturel n tel que $p(X \geqslant 1) \geqslant 0,95$

   $p(X \geqslant 1) \geqslant 0,95 \iff 1 - p(X = 0) \geqslant 0,95 \iff -p(X = 0) \geqslant -0,05 \iff$

   $p(X = 0) \leqslant 0,05$; or $p(X = 0) = \dbinom{n}{0} \times 0,07^0 \times 0,93^n = 0,93^n$

   $0,93^n \leqslant 0,05 \iff \ln(0,93^n) \leqslant \ln(0,05)$ car ln est croissante sur $]0\,; +\infty[$

   $\iff n\ln(0,93) \leqslant \ln(0,05) \iff n \geqslant \dfrac{\ln(0,05)}{\ln(0,93)}$ car $\ln(0,93) < 0$

   $\iff n \geqslant 41,3 \iff n \geqslant 42$

   Il faut donc tirer au minimum 42 objets pour que la probabilité qu'un joueur obtienne au moins un objet rare soit supérieure ou égale à 0,95.