

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

BAC BLANC N°2

MATHÉMATIQUES

Mercredi 8 Avril 2026

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collègue » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Exercice 1 : 5 points

Parmi les angines, un quart nécessite la prise d'antibiotiques, les autres non.

Afin d'éviter de prescrire inutilement des antibiotiques, les médecins disposent d'un test de diagnostic ayant les caractéristiques suivantes :

- lorsque l'angine nécessite la prise d'antibiotiques, le test est positif dans 90 % des cas;
- lorsque l'angine ne nécessite pas la prise d'antibiotiques, le test est négatif dans 95 % des cas.

Les probabilités demandées dans la suite de l'exercice seront arrondies à 10^{-4} près si nécessaire.

Partie 1

Un patient atteint d'angine et ayant subi le test est choisi au hasard.

On considère les évènements suivants :

- A : « le patient est atteint d'une angine nécessitant la prise d'antibiotiques »;
- T : « le test est positif »;
- \bar{A} et \bar{T} sont respectivement les évènements contraires de A et T .

1. Calculer $P(A \cap T)$. On pourra s'appuyer sur un arbre pondéré.
2. Démontrer que $P(T) = 0,2625$.
3. On choisit un patient ayant un test positif. Calculer la probabilité qu'il soit atteint d'une angine nécessitant la prise d'antibiotiques.
4.
 - a. Parmi les évènements suivants, déterminer ceux qui correspondent à un résultat erroné du test : $A \cap T, \bar{A} \cap T, A \cap \bar{T}, \bar{A} \cap \bar{T}$.
 - b. On définit l'évènement E : « le test fournit un résultat erroné ».
Démontrer que $p(E) = 0,0625$.

Partie 2

On sélectionne au hasard un échantillon de n patients qui ont été testés.

On admet que l'on peut assimiler ce choix d'échantillon à un tirage avec remise.

On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de patients de cet échantillon ayant un test erroné.

1. On suppose que $n = 50$.
 - a. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0,0625$.
 - b. Calculer $P(X = 7)$
 - c. Calculer la probabilité qu'il y ait au moins un patient dans l'échantillon dont le test est erroné.
2. Quelle valeur minimale de la taille de l'échantillon faut-il choisir pour que $P(X \geq 1)$ soit supérieure ou égale à 0,95 ?

Exercice 2 : 6 points

Des biologistes étudient l'évolution d'une population d'insectes dans un jardin botanique.

Au début de l'étude la population est de 100 000 insectes.

Pour préserver l'équilibre du milieu naturelle nombre d'insectes ne doit pas dépasser 400 000.

Partie A : Étude d'un premier modèle en laboratoire

L'observation de l'évolution de ces populations d'insectes en laboratoire, en l'absence de tout prédateur, montre que le nombre d'insectes augmente de 60 % chaque mois.

En tenant compte de cette observation, les biologistes modélisent l'évolution de la population d'insectes à l'aide d'une suite (u_n) où, pour tout entier naturel n , u_n modélise le nombre d'insectes, exprimé en millions, au bout de n mois.

On a donc $u_0 = 0,1$.

1. Justifier que pour tout entier naturel n : $u_n = 0,1 \times 1,6^n$.
2. Déterminer la limite de la suite (u_n) .
3. En résolvant une inéquation, déterminer le plus petit entier naturel n à partir duquel $u_n > 0,4$.
4. Selon ce modèle, l'équilibre du milieu naturel serait-il préservé? Justifier la réponse.

Partie B : Étude d'un second modèle

En tenant compte des contraintes du milieu naturel dans lequel évoluent les insectes, les biologistes choisissent une nouvelle modélisation.

Ils modélisent le nombre d'insectes à l'aide de la suite (v_n) , définie par :

$$v_0 = 0,1 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n, v_{n+1} = 1,6v_n - 1,6v_n^2,$$

où, pour tout entier naturel n , v_n est le nombre d'insectes, exprimé en millions, au bout de n mois.

1. Déterminer le nombre d'insectes au bout d'un mois.
2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ par

$$f(x) = 1,6x - 1,6x^2.$$

- a. Résoudre l'équation $f(x) = x$.
 - b. Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $\left[0; \frac{1}{2}\right]$.
3. a. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $0 \leq v_n \leq v_{n+1} \leq \frac{1}{2}$.
b. Montrer que la suite (v_n) est convergente.
On note ℓ la valeur de sa limite.

c. Déterminer la valeur de ℓ .

Selon ce modèle, l'équilibre du milieu naturel sera-t-il préservé? Justifier la réponse.

4. On donne ci-contre la fonction seuil, écrite en langage Python.

- a. Qu'observe-t-on si on saisit `seuil(0.4)`?
- b. Déterminer la valeur renvoyée par la saisie de `seuil(0.35)`.
Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

```
def seuil(a) :  
    v=0.1  
    n=0  
    while v<a :  
        v=1.6*v-1.6*v*v  
        n=n+1  
    return n
```

Exercice 3 : 5 points

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points

$$A(-1; -1; 3), \quad B(1; 1; 2), \quad C(1; -1; 7)$$

On considère également la droite Δ passant par les points $D(-1; 6; 8)$ et $E(11; -9; 2)$.

1. a. Vérifier que la droite Δ admet pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -1 + 4t \\ y = 6 - 5t \\ z = 8 - 2t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

- b. Préciser une représentation paramétrique de la droite Δ' parallèle à Δ et passant par l'origine O du repère.
- c. Le point $F(1,36; -1,7; -0,7)$ appartient-il à la droite Δ' ?
2. a. Montrer que les points A, B et C définissent un plan.
- b. Montrer que la droite Δ est perpendiculaire au plan (ABC) .
- c. Montrer qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $4x - 5y - 2z + 5 = 0$.
3. a. Montrer que le point $G(7; -4; 4)$ appartient à la droite Δ .
- b. Déterminer les coordonnées du point H , projeté orthogonal du point G sur le plan (ABC) .
- c. En déduire que la distance du point G au plan (ABC) est égale à $3\sqrt{5}$.
4. a. Montrer que le triangle ABC est rectangle en A .
- b. Calculer le volume V du tétraèdre $ABCG$.

On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par la formule $V = \frac{1}{3} \times B \times h$ où B est l'aire d'une base et h la hauteur correspondant à cette base

Exercice 4 : 4 points

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par

$$g(x) = 1 + x^2(1 - 2 \ln(x))$$

La fonction g est dérivable sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ et on note g' sa fonction dérivée.
On appelle \mathcal{C} la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthonormé du plan.

PARTIE A

- Justifier que $g(e)$ est strictement négatif.
- Justifier que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$.
- Montrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $]0 ; +\infty[$, $g'(x) = -4x \ln(x)$.
 - Étudier le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$
 - Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution, notée α , sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$.
 - Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}
- Déduire de ce qui précède le signe de la fonction g sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$.

PARTIE B

- On admet que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[1 ; \alpha]$, $g''(x) = -4 \ln(x) - 4$
Justifier que la fonction g est concave sur l'intervalle $[1 ; \alpha]$.
- Sur la figure ci-contre, A et B sont les points de la courbe \mathcal{C} d'abscisses respectives 1 et α .
 - Déterminer l'équation réduite de la droite (AB).
 - En déduire que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[1 ; \alpha]$, $g(x) \geq \frac{-2}{\alpha - 1}x + \frac{2\alpha}{\alpha - 1}$

