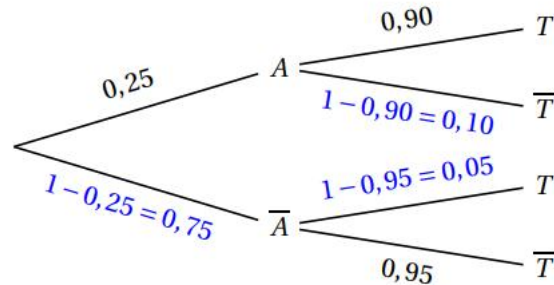


Exercice 1

Partie 1

1. On résume la situation par un arbre pondéré.



$$P(A \cap T) = P(A) \times P_A(T) = 0,25 \times 0,90 = 0,225$$

2. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(T) = P(A \cap T) + P(\bar{A} \cap T) = 0,225 + 0,75 \times 0,05 = 0,2625$$

3. On choisit un patient ayant un test positif. La probabilité qu'il soit atteint d'une angine nécessitant la prise d'antibiotiques est :

$$P_T(A) = \frac{P(A \cap T)}{P(T)} = \frac{0,225}{0,2625} \approx 0,8571$$

4. a. Les événements correspondant à un résultat erroné du test sont : $\bar{A} \cap T$ et $A \cap \bar{T}$.

b. On définit l'évènement E : « le test fournit un résultat erroné ».

$$P(E) = P(\bar{A} \cap T) + P(A \cap \bar{T}) = 0,25 \times 0,10 + 0,75 \times 0,05 = 0,0625$$

Partie 2

1. On suppose que $n = 50$.

a. On a une répétition de 50 épreuves indépendantes et identiques n'ayant que deux issues et dont le succès a pour probabilité $p = 0,0625$; donc la variable aléatoire X qui donne le nombre de succès suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ de paramètres $n = 50$ et $p = 0,0625$.

b.
$$P(X = 7) = \binom{50}{7} \times 0,0625^7 \times (1 - 0,0625)^{50-7} \approx 0,0237$$

c. La probabilité qu'il y ait au moins un patient dans l'échantillon dont le test est erroné est :

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{50}{0} \times 0,0625^0 \times (1 - 0,0625)^{50} \approx 0,9603$$

2. On cherche le plus petit entier n tel que $P(X \geq 1) \geq 0,95$

or
$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{n}{0} \times 0,0625^0 \times (1 - 0,0625)^n = 1 - 0,9375^n$$

et
$$1 - 0,9375^n \geq 0,95 \Leftrightarrow 0,9375^n \leq 0,05$$

$$\Leftrightarrow \ln(0,9375^n) \leq \ln(0,05)$$

$$\Leftrightarrow n \ln(0,9375) \leq \ln(0,05)$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0,05)}{\ln(0,9375)} \quad \text{or} \quad \frac{\ln(0,05)}{\ln(0,9375)} \approx 46,4$$

donc la valeur minimale de la taille de l'échantillon est $n = 47$

Exercice 2

Partie A

1. Augmenter de 60 %, c'est multiplier par $1 + \frac{60}{100} = 1,6$. La suite (u_n) est donc géométrique de raison $q = 1,6$.

La forme explicite d'une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 est : $u_n = u_0 \times q^n$ donc $u_n = 0,1 \times 1,6^n$ pour tout n de \mathbb{N} .

2. $1,6 > 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1,6^n = +\infty$

On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,1 \times 1,6^n = +\infty$ et donc que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

3. On résout l'inéquation $u_n > 0,4$.

$$\begin{aligned} u_n > 0,4 &\iff 0,1 \times 1,6^n > 0,4 \iff 1,6^n > 4 \iff \ln(1,6^n) > \ln(4) \iff n \times \ln(1,6) > \ln(4) \\ &\iff n > \frac{\ln(4)}{\ln(1,6)} \end{aligned}$$

Or $\frac{\ln(4)}{\ln(1,6)} \approx 2,95$, donc le plus petit entier naturel n à partir duquel $u_n > 0,4$ est 3.

4. $u_3 > 0,4$ signifie que le nombre d'insectes dépasse 400 000 dès le 3^e mois; selon ce modèle le milieu naturel n'est donc pas préservé.

Partie B

1. $v_1 = 1,6v_0 - 1,6v_0^2 = 1,6 \times 0,1 - 1,6 \times 0,1^2 = 0,144$.

Le nombre d'insectes au bout d'un mois est donc égal à 144 000.

2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ par $f(x) = 1,6x - 1,6x^2$.

a. On résout l'équation $f(x) = x$.

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff 1,6x - 1,6x^2 = x \iff 0,6x - 1,6x^2 = 0 \iff x(0,6 - 1,6x) = 0 \\ &\iff x = 0 \text{ ou } 0,6 - 1,6x = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = \frac{0,6}{1,6} \iff x = 0 \text{ ou } x = \frac{3}{8} \end{aligned}$$

Les deux solutions appartiennent à l'intervalle $\left[0; \frac{1}{2}\right]$, donc l'équation $f(x) = x$ admet deux solutions dans cet intervalle : 0 et $\frac{3}{8}$.

b. $f'(x) = 1,6 \times 1 - 1,6 \times 2x = 1,6(1 - 2x)$

$x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$ donc $x \leq \frac{1}{2}$ et donc $1 - 2x \geq 0$.

Sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$, $f'(x) \geq 0$ donc f est croissante.

3. a. On va montrer par récurrence que la propriété $n, 0 \leq v_n \leq v_{n+1} \leq \frac{1}{2}$ est vraie pour tout entier naturel n .

• **Initialisation**

$v_0 = 0,1$ et $v_1 = \frac{3}{8}$; on a donc $0 \leq v_0 \leq v_1 \leq \frac{1}{2}$.

La propriété est donc vraie au rang 0.

• **Hérédité**

On suppose la propriété vraie au rang n , c'est-à-dire $0 \leq v_n \leq v_{n+1} \leq \frac{1}{2}$; c'est l'hypothèse de récurrence.

On a : $0 \leq v_n \leq v_{n+1} \leq \frac{1}{2}$ et on sait que la fonction f est croissante sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$; on en déduit que : $f(0) \leq f(v_n) \leq f(v_{n+1}) \leq f\left(\frac{1}{2}\right)$.

$f(0) = 0$; $f(v_n) = v_{n+1}$; $f(v_{n+1}) = v_{n+2}$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1,6 \times \frac{1}{2} - 1,6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0,4$

Donc $f(0) \leq f(v_n) \leq f(v_{n+1}) \leq f\left(\frac{1}{2}\right)$ équivaut à $0 \leq v_{n+1} \leq v_{n+2} \leq 0,4$ ce qui entraîne $0 \leq v_{n+1} \leq v_{n+2} \leq \frac{1}{2}$.

La propriété est donc vraie au rang $n + 1$.

• **Conclusion**

La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire pour tout $n \in \mathbb{N}$; d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- b. On sait que :

- $v_n \leq v_{n+1}$ pour tout n , donc la suite (v_n) est croissante;
- $v_n \leq \frac{1}{2}$ pour tout n , donc la suite (v_n) est majorée par $\frac{1}{2}$.

La suite (v_n) est croissante et majorée donc, d'après le théorème de la convergence monotone, on peut dire que la suite (v_n) est convergente.

- c. La suite (v_n) est croissante et admet pour limite ℓ ; donc pour tout n , on aura $v_n \leq \ell$. En particulier $v_1 \leq \ell$ donc $\ell \geq 0,1$.

La limite ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$ donc c'est soit 0, soit $\frac{3}{8}$. Mais $\ell \geq 0,1$ donc ℓ

ne peut être égale à 0. Donc $\ell = \frac{3}{8} = 0,375$.

Pour tout n , on aura $v_n \leq \ell$, donc $v_n \leq 0,375$; il y aura donc toujours moins de 375 000 insectes. Donc, selon ce modèle, l'équilibre du milieu naturel sera préservé.

4. On donne ci-contre la fonction `seuil`, écrite en langage Python.

- a. La fonction `seuil(a)` donne la première (et plus petite) valeur de n telle que $v_n \geq a$, c'est-à-dire telle que $v_n \geq a$.

On a vu que $v_n \leq 0,375$ pour tout n ; il n'y a donc pas de valeur de n pour laquelle $v_n \geq 0,4$.

Le programme ne s'arrête jamais.

```
def seuil(a) :
    v=0.1
    n=0
    while v<a :
        v=1.6*v-1.6*v*v
        n=n+1
    return n
```

- a. À la calculatrice, on trouve $v_5 \approx 0,338 < 0,35$ et $v_6 \approx 0,358 \geq 0,35$; donc la valeur renvoyée par `seuil(0.35)` est 6.

Cela signifie qu'à partir du 6^e mois, il y aura plus de 350 000 insectes.

Exercice 3

1. a. Avec $\overrightarrow{DE} \begin{pmatrix} 12 \\ -15 \\ -6 \end{pmatrix}$, on peut prendre comme vecteur directeur de $\Delta : \frac{1}{3} \overrightarrow{DE} \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}$.

On a $M(x; y; z) \in (DE) \iff$ il existe $t \in \mathbb{R}$, tel que $\overrightarrow{DM} = t \frac{1}{3} \overrightarrow{DE}$, soit

$$\begin{cases} x+1 = 4t \\ y-6 = -5t \\ z-8 = -2t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} x = -1+4t \\ y = 6-5t \\ z = 8-2t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

- b. La droite Δ' est parallèle à Δ donc elle a les mêmes vecteurs directeurs que Δ . De plus, elle passe par l'origine O du repère donc elle a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 0+4t \\ y = 0-5t \\ z = 0-2t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R} \text{ soit } \begin{cases} x = 4t \\ y = -5t \\ z = -2t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

- c. $F(1,36; -1,7; -0,7) \in \Delta' \iff \begin{cases} 1,36 = 4t \\ -1,7 = -5t \\ -0,7 = -2t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}$

Les deux premières équations donnent $t = 0,34$ et la dernière $t = 0,35$.

Donc $F \notin \Delta$.

2. a. On a $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$: ces deux vecteurs ne sont manifestement pas colinéaires, donc les trois points A, B et C définissent un plan.

- b. On a $\frac{1}{3} \overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{AB} = 8 - 10 + 2 = 0$;

De même $\frac{1}{3} \overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{AC} = 8 + 0 - 8 = 0$.

Donc \overrightarrow{DE} est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC); il est normal à ce plan.

- c. D'après la question précédente on sait que :

$$M(x; y; z) \in (ABC) \iff 4x - 5y - 2z + d = 0 \text{ avec } d \in \mathbb{R}$$

Or $A(-1; -1; 3) \in (ABC)$ donc $4 \times (-1) - 5 \times (-1) - 2 \times 3 + d = 0$ avec $d \in \mathbb{R}$, soit $-5 + d = 0 \iff d = 5$.

$$\text{Conclusion : } M(x; y; z) \in (ABC) \iff 4x - 5y - 2z + 5 = 0.$$

3. a. $G(7; -4; 4) \in \Delta \iff \begin{cases} 7 = -1+4t \\ -4 = 6-5t \\ 4 = 8-2t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}$

Ces trois équations ont pour solution $t = 2$, donc $G(7; -4; 4) \in \Delta$.

- b. Le point H appartient à la droite Δ et au plan (ABC). Donc ses coordonnées x, y, z vérifient le système :

$$\begin{cases} x = -1+4t \\ y = 6-5t \\ z = 8-2t \\ 4x-5y-2z+5 = 0 \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

En remplaçant x, y, z par leurs valeurs en fonction de t dans la dernière équation, on obtient :

$$4(-1+4t) - 5(6-5t) - 2(8-2t) + 5 = 0 \iff -4 + 16t - 30 + 25t - 16 + 4t + 5 = 0 \iff 45t - 45 = 0 \iff 45t = 45 \iff t = 1.$$

Les coordonnées de H sont donc $(-1+4; 6-5; 8-2)$ soit $H(3; 1; 6)$.

c. La distance du point G au plan (ABC) est donc égale à GH.

Or $GH^2 = (3 - 7)^2 + (1 + 4)^2 + (6 - 4)^2 = 16 + 25 + 4 = 45$, d'où

$GH = \sqrt{45} = \sqrt{9 \times 5} = \sqrt{9} \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$.

4. a. D'après la question 2. a., on a $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 2 \times 2 + 2 \times 0 + 4 \times (-1) = 4 - 4 = 0$: les vecteurs \vec{AB} et \vec{AC} sont orthogonaux, donc les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires : le triangle ABC est rectangle en A.

b. En prenant comme base le triangle ABC, la hauteur correspondante est GH, donc :

$V = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}(ABC) \times GH = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times AB \times AC \times GH$.

On a $AB^2 = 2^2 + 2^2 + (-1)^2 = 4 + 4 + 1 = 9$, donc $AB = 3$;

$AC^2 = 2^2 + 0^2 + 4^2 = 4 + 16 = 20$, donc $AC = \sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = 2\sqrt{5}$.

Donc $V = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 3 \times 2\sqrt{5} \times 3\sqrt{5} = 15$.

Exercice 4

Partie A

1. $g(e) = 1 + e^2(1 - 2\ln(e)) = 1 + e^2(1 - 2) = 1 - e^2$

$e > 2$ donc $e^2 > 4$ donc $1 - e^2 < 0$, et donc $g(e) < 0$.

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - 2\ln(x) = -\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2(1 - 2\ln(x)) = -\infty$.

On en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$.

3. a. Pour $x \in]0; +\infty[$, on a :

$g'(x) = 2x(1 - 2\ln(x)) + x^2 \left(-\frac{2}{x}\right) = 2x - 4x\ln(x) - 2x = -4x\ln(x)$.

b. Pour étudier le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]0; +\infty[$, on détermine le signe de $g'(x)$ sur cet intervalle.

| | | | |
|---------------------|---|---|-----------|
| x | 0 | 1 | $+\infty$ |
| $-4x$ | | - | - |
| $\ln(x)$ | | 0 | + |
| $g'(x) = -4x\ln(x)$ | | + | - |

Donc la fonction g

- est strictement croissante sur $]0; 1[$;
- est strictement décroissante sur $]1; +\infty[$;
- admet en $x = 1$ un maximum égal à $g(1) = 1 + 1^2(1 - \ln(1)) = 2$.

c. On trace le tableau des variations de la fonction g sur $]1; +\infty[$.

| | | | |
|---------|---|---|-----------|
| x | 0 | 1 | $+\infty$ |
| $g'(x)$ | | + | - |
| $g(x)$ | | 2 | $-\infty$ |

D'après ce tableau de variations, on peut dire que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique sur l'intervalle $]1; +\infty[$. On appelle α cette solution.

$$\left. \begin{array}{l} g(1,89) \approx 0,024 > 0 \\ g(1,90) \approx -0,024 < 0 \end{array} \right\} \text{ donc } \alpha \in [1,89; 1,90]$$

4. On en déduit le signe de la fonction g sur l'intervalle $[1; +\infty[$.

| | | | |
|--------|---|----------|-----------|
| x | 1 | α | $+\infty$ |
| $g(x)$ | + | 0 | - |

PARTIE B

1. On admet que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[1; \alpha]$, $g''(x) = -4[\ln(x) + 1]$.

Sur $[1; \alpha]$, $\ln(x) \geq 0$ donc $\ln(x) + 1 > 0$ donc $-4(\ln(x) + 1) < 0$.

On en déduit que $g''(x) > 0$ et donc que la fonction g est concave sur $[1; \alpha]$.

2.

a. La droite (AB) a pour équation réduite :

$$\begin{aligned} \frac{y - y_A}{x - x_A} &= \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \iff \frac{y - 2}{x - 1} = \frac{0 - 2}{\alpha - 1} \iff y = \frac{-2(x - 1)}{\alpha - 1} + 2 \\ \iff y &= \frac{-2}{\alpha - 1}x + \frac{2}{\alpha - 1} + \frac{2\alpha - 2}{\alpha - 1} \iff y = \frac{-2}{\alpha - 1}x + \frac{2\alpha}{\alpha - 1} \end{aligned}$$

b. Sur l'intervalle $[1; \alpha]$, la fonction est concave, donc sa courbe représentative est située au dessus de toute sécante, donc au dessus du segment [AB].

On en déduit que sur $[1; \alpha]$, on a : $g(x) \geq \frac{-2}{\alpha - 1}x + \frac{2\alpha}{\alpha - 1}$.