BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

BAC BLANC N°2

MATHÉMATIQUES

Mercredi 3 avril 2024

Sujet 1

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Exercice 1 (6 points)

Au 1er janvier 2020, la centrale solaire de Big Sun possédait 10 560 panneaux solaires.
On observe, chaque année, que 2 % des panneaux se sont détériorés et nécessitent d'être retirés tandis que 250 nouveaux panneaux solaires sont installés.

Partie A - Modélisation à l'aide d'une suite

On modélise l'évolution du nombre de panneaux solaires par la suite (u_n) définie par $u_0 = 10560$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,98u_n + 250$, où u_n est le nombre de panneaux solaires au 1er janvier de l'année $2020 + n$.

1. **a.** Expliquer en quoi cette modélisation correspond à la situation étudiée.
   b. On souhaite savoir au bout de combien d'années le nombre de panneaux solaires sera strictement supérieur à 12 000.
   À l'aide de la calculatrice, donner la réponse à ce problème.
   c. Recopier et compléter le programme en Python ci-dessous de sorte que la valeur cherchée à la question précédente soit stockée dans la variable n à l'issue de l'exécution de ce dernier.

```
u = 10560
n= 0
while ......:
    u = ......
    n = ......
```

2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $u_n \leqslant 12500$.

3. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

4. En déduire que la suite (u_n) converge. Il n'est pas demandé, ici, de calculer sa limite.

5. On définit la suite (v_n) par $v_n = u_n - 12500$, pour tout entier naturel n.

   a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,98 dont on précisera le premier terme.
   b. Exprimer, pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n.
   c. En déduire, pour tout entier naturel n, u_n en fonction de n.
   d. Déterminer la limite de la suite (u_n).
   Interpréter ce résultat dans le contexte du modèle.

Partie B - Modélisation à l'aide d'une fonction

Une modélisation plus précise a permis d'estimer le nombre de panneaux solaires de la centrale à l'aide de la fonction f définie pour tout $x \in [0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = 12\,500 - 500e^{-0{,}02x+1{,}4}$$

où x représente le nombre d'années écoulées depuis le 1er janvier 2020.

1. Étudier le sens de variation de la fonction f.
2. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
3. En utilisant ce modèle, déterminer au bout de combien d'années le nombre de panneaux solaires dépassera 12 000.

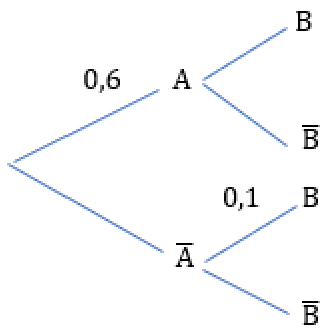
Exercice 2 (4 points)

Pour chacune des affirmations, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Toute réponse non justifiée ne rapporte pas de point.

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3e^{-x^2} + 2$

   <u>Affirmation1</u> :Les primitives de la fonction f sont croissantes sur $\mathbb{R}$.

2. On donne l'arbre ci-contre.



   <u>Affirmation 2 :</u> Sachant que $P(B) = 0{,}22$ alors $P_A(B) = 0{,}12$.

3. Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher, 7 bleues et les autres vertes. On effectue 3 tirages successifs avec remise.

   <u>Affirmation 3 :</u> La probabilité d'avoir 2 boules vertes est : $\binom{10}{2}\left(\frac{7}{10}\right)\left(\frac{3}{10}\right)^2$.

4. Une variable aléatoire X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n\,;\,0{,}18)$ avec n entier naturel.

   <u>Affirmation 4 :</u> Le plus petit entier n tel que $P(X \geq 1) > 0{,}99$ est 23.

Exercice 3 (5 points)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = x + 4 - 4\ln(x) - \frac{3}{x}$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.
On note $\mathscr{C}$ la représentation graphique de f dans un repère orthonormé.

1. **a.** Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$

   b. Montrer que pour tout réel x strictement positif, $f(x) = \dfrac{x^2+4x-4x\ln(x)-3}{x}$
   et en déduire la limite de la fonction f en 0.

2. On admet que la fonction f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.
   Démontrer que, pour tout nombre réel $x > 0$, on a :

$$f'(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2}.$$

3. **a.** Donner le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   On y fera figurer les valeurs exactes des extremums et les limites de f en 0 et en $+\infty$.

   b. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]\,0\,;+\infty\,[$ et en déduire le tableau de signes de la fonction f sur $]\,0\,;+\infty\,[$

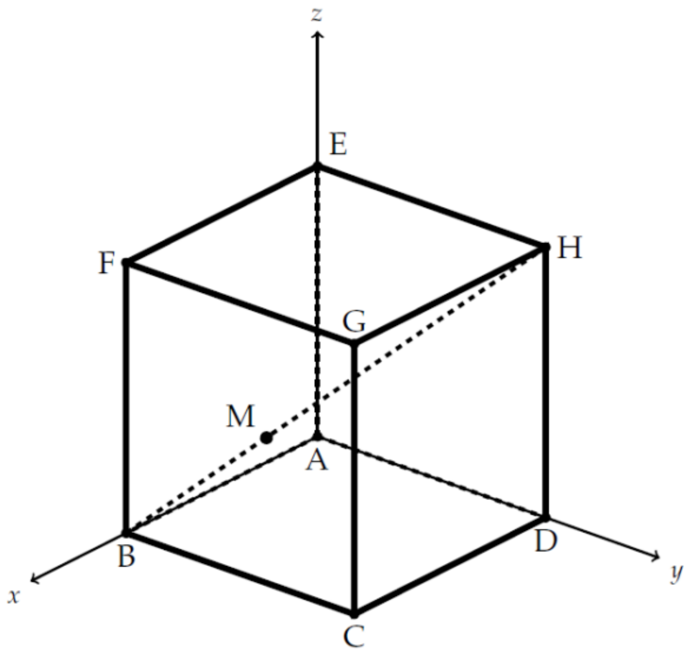
4. Étudier la convexité de la fonction f c'est-à-dire préciser les parties de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ sur lesquelles f est convexe, et celles sur lesquelles f est concave.
   On justifiera que la courbe $\mathscr{C}$ admet un unique point d'inflexion, dont on précisera les coordonnées.

Exercice 4 (5 points)

Dans l'espace, on considère le cube ABCDEFGH d'arête de longueur égale à 1.

On munit l'espace du repère orthonormé $(\mathrm{A}\,;\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{AD}},\overrightarrow{\mathrm{AE}})$.

On considère le point M tel que $\overrightarrow{\mathrm{BM}} = \frac{1}{3}\,\overrightarrow{\mathrm{BH}}$.



1. Par lecture graphique, donner les coordonnées des points B, D, E, G et H.

2.

a. Quelle est la nature du triangle EGD ? Justifier la réponse.

b. On admet que l'aire d'un triangle équilatéral de côté c est égale à $\frac{\sqrt{3}}{4}c^2$.

Montrer que l'aire du triangle EGD est égale à $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. Démontrer que les coordonnées de M sont $\left(\frac{2}{3}\,;\frac{1}{3}\,;\frac{1}{3}\right)$.

4.

a. Justifier que le vecteur $\vec{n}(-1\,;1\,;1)$ est normal au plan (EGD).

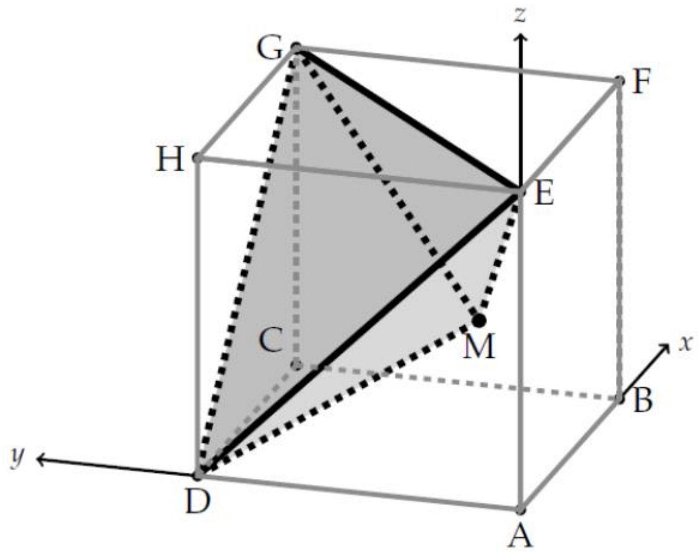
b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (EGD) est : $-x + y + z - 1 = 0$.

c. Soit $\mathcal{D}$ la droite orthogonale au plan (EGD) et passant par le point M.

Montrer qu'une représentation paramétrique de cette droite est :

$$\mathcal{D}:\begin{cases} x = \frac{2}{3} - t \\ y = \frac{1}{3} + t\,, \quad t \in \mathbf{R}. \\ z = \frac{1}{3} + t \end{cases}$$

5. Le cube ABCDEFGH est représenté ci-dessus selon une vue qui permet de mieux percevoir la pyramide GEDM, en gris sur la figure :



Le but de cette question est de calculer le volume de la pyramide GEDM.

a. Soit K, le pied de la hauteur de la pyramide GEDM issue du point M.

Démontrer que les coordonnées du point K sont $\left(\frac{1}{3}\,;\frac{2}{3}\,;\frac{2}{3}\right)$.

b. En déduire le volume de la pyramide GEDM.

On rappelle que le volume V d'une pyramide est donné par la formule $V = \frac{b \times h}{3}$ *où b désigne l'aire d'une base et h la hauteur associée.*