EXERCICE 1 :

Partie A – Modélisation à l'aide d'une suite

1. **a.** Si 2% des panneaux se sont détériorés cela signifie que 98% sont en état de fonctionner. Pour tout entier naturel n, cela correspond donc à $0,98u_n$ panneaux.
   Chaque année 250 nouveaux panneaux sont installés.
   Par conséquent $u_{n+1} = 0,98u_n + 250$.
   En 2020, la société possédait $10\ 560$ panneaux. Donc $u_0 = 10\ 560$.

   b. D'après la calculatrice, c'est-à-partir du rang 68 que $u_n > 12\ 000$.
   Il faut 68 ans pour que le nombre de panneaux solaires soit strictement supérieur à $12\ 000$.

   c.

```
u = 10560
n = 0
while u <= 12000 :
    u = 0.98 * u + 250
    n = n + 1
```

2. **Initialisation :** On a $u_0 = 10\ 560 < 12\ 500$
   La propriété est vraie au rang 0.

   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose la propriété vraie au rang n.
   $$\begin{aligned} u_{n+1} &= 0,98u_n + 250 \\ &< 0,98 \times 12\ 500 + 250 \\ &< 12\ 250 + 250 \\ &< 12\ 500 \end{aligned}$$
   La propriété est vraie au rang $n+1$.

   Conclusion : La propriété est vraie au rang 0 et est héréditaire.
   Par conséquent, pour tout entier naturel n on a $u_n < 12\ 500$.

3. Pour tout entier naturel n on a
   $$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 0,98u_n + 250 - u_n \\ &= -0,02u_n + 250 \\ &= 0,02\left(-u_n + 12\ 500\right) \end{aligned}$$
   Or, pour tout entier naturel n, on a $u_n < 12\ 500$.
   Par conséquent $u_{n+1} - u_n > 0$.
   La suite (u_n) est strictement croissante.

4. La suite (u_n) est croissante et majorée par $12\ 500$. Elle converge donc.

5. **a.** Pour tout entier naturel n,
   $$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 12\ 500 \\ &= 0,98u_n + 250 - 12\ 500 \\ &= 0,98u_n - 12\ 250 \\ &= 0,98\left(u_n - 12\ 500\right) \\ &= 0,98v_n \end{aligned}$$
   La suite (v_n) est donc géométrique de raison $q = 0,98$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 12\ 500 = -1\ 940$.

b. Ainsi, pour tout entier naturel n on a $v_n = -1\ 940 \times 0,98^n$.

c. Donc, pour tout entier naturel n, $u_n = v_n + 12\ 500 = 12\ 500 - 1\ 940 \times 0,98^n$.

d. $-1 < 0,98 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} -1\ 940 \times 0,98^n = 0$.

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 12\ 500$.

Sur le long terme, la centra solaire Big Sun possèdera 12 500 panneaux solaires.

Partie B

1. La fonction f est dérivable sur $[0; +\infty[$ en tant que composée et somme de fonctions dérivables.
   Pour tout réel $x \geqslant 0$
   $f'(x) = -500 \times (-0,02)\mathrm{e}^{-0,02x+1,4}$
   $= 10\mathrm{e}^{-0,02x+1,4}$
   La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc $f'(x) > 0$.
   La fonction f est par conséquent strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

2. $\lim\limits_{x \to +\infty} -0,02x + 1,4 = -\infty$ or $\lim\limits_{X \to -\infty} \mathrm{e}^X = 0$
   Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-0,02x+1,4} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 12\ 500$.

3. On veut résoudre l'inéquation :
   $$\begin{aligned} f(x) > 12\ 000 &\Leftrightarrow 12\ 500 - 500\mathrm{e}^{-0,02x+1,4} > 12\ 000 \\ &\Leftrightarrow -500\mathrm{e}^{-0,02x+1,4} > -500 \\ &\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-0,02x+1,4} < 1 \\ &\Leftrightarrow -0,02x + 1,4 < 0 \\ &\Leftrightarrow -0,02x < -1,4 \\ &\Leftrightarrow x > 70 \end{aligned}$$
   C'est donc au bout de 70 ans, selon ce modèle, que le nombre de panneaux solaires dépassera 12 000.

EXERCICE 2 :

1. Soit F une primitive de la fonction f sur IR, alors par définition $F'(x) = f(x)$
   or, pour tout réel x, $f(x) = 3e^{-x^2} + 2 > 0$ donc $F'(x) > 0$ sur IR, donc F est croissante sur IR
   L'affirmation 1 est vraie

2. $A\ et\ \bar{A}$ forment une partition de l'univers, donc, d'après la formule des probabilités totales,

$p(B) = p\ (A \cap B) + p\ (\bar{A} \cap B) = p(A) \times p_A(B) + p(\bar{A}) \times p_{\bar{A}}\ (B) = 0{,}6 \times p_A(B) + 0{,}4 \times 0{,}1 = 0{,}6p_A(B) + 0{,}04$

or $p\ (B) = 0{,}22$ d'où $0{,}6p_A(B) + 0{,}04 = 0{,}22 \Leftrightarrow 0{,}6p_A(B) = 0{,}18 \Leftrightarrow p_A(B) = \frac{0{,}18}{0{,}6} = 0{,}3$

L'affirmation 2 est fausse

3. Soit X la variable aléatoire associée au nombre de boules vertes obtenues sur les 3 tirages.
   Alors, X suit la loi binomiale de paramètres n = 3 et $p = \frac{3}{10}$ et la probabilité d'avoir 2 boules vertes est

   $P(X = 2) = \binom{3}{2} \times \left(\frac{3}{10}\right)^2 \times \left(1 - \frac{3}{10}\right)^1 = \binom{3}{2} \times \left(\frac{3}{10}\right)^2 \times \left(\frac{7}{10}\right) \neq \binom{10}{2} \times \left(\frac{7}{10}\right)\left(\frac{3}{10}\right)^2$
   L'affirmation 3 est fausse

4. $P(X \geq 1) > 0{,}99 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - P(X = 0) > 0{,}99 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - \binom{n}{0} \times 0{,}18^0 \times (1 - 0{,}18)^n > 0{,}99$

$\Leftrightarrow \; 1 - 0{,}82^n > 0{,}99 \quad \Leftrightarrow \; -0{,}82^n > 0{,}99 - 1 \Leftrightarrow \; -0{,}82^n > -0{,}01 \Leftrightarrow \; 0{,}82^n < 0{,}01$

$\Leftrightarrow \quad \ln(0{,}82^n) < \ln(0{,}01) \quad \Leftrightarrow \quad n\ln(0{,}82) < \ln(0{,}01) \quad \Leftrightarrow \quad n > \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}82)}$ (car $\ln(0{,}82) < 0$)

or $\frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}82)} \approx 23{,}2 \qquad$ *donc* $\qquad$ *le plus petit entier est* $\; n = 24$

L'affirmation 4 est fausse

EXERCICE 3 :

1. a. Pour tout réel $x > 0$ on a $f(x) = x\left(1 + \dfrac{4}{x} - \dfrac{4\ln(x)}{x} - \dfrac{3}{x^2}\right)$.

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4}{x} = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3}{x^2} = 0$ et, par croissances comparées $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$.

Ainsi $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

b. $f(x) = x + 4 - 4ln(x) - \frac{3}{x} = \frac{x^2}{x} + \frac{4x}{x} - \frac{4xln(x)}{x} - \frac{3}{x} = \frac{x^2+4x-4xln(x)-3}{x}$

or d'après les croissances comparées, $\lim\limits_{x \to 0} xln(x) = 0$ ainsi

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0} x^2 + 4x - 4xln(x) - 3 = -3 \\ \lim\limits_{x \to 0} x = 0 \quad \text{avec} \quad x > 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \text{par quotient,} \\ \lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty \end{array}$$

2. Puisque $f(x) = x + 4 - 4ln(x) - \frac{3}{x}$, alors $\quad f'(x) = 1 - \dfrac{4}{x} + \dfrac{3}{x^2}$

$$= \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2}$$

3. **a.** Le signe de $f'(x)$ ne dépend que de celui de $x^2 - 4x + 3$.

$\Delta = 16 - 12 = 4 > 0$

Le polynôme du second degré possède donc deux racines :

$x_1 = \dfrac{4-2}{2} = 1$ et $x_2 = \dfrac{4+2}{2} = 3$

Le coefficient principal est $a = 1 > 0$.

On obtient donc le tableau de variations suivant :

x	0		1		3		$+\infty$
$x^2 - 4x + 3$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
f	‖ $-\infty$	↗	2	↘	$6 - 4\ln(3)$	↗	$+\infty$

b. Sur] 0 ; 1], la fonction f est définie, continue et strictement croissante avec $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$ et $f(1) = 2$. Or 0 appartient à] - ∞ ; 2] donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet 1 unique solution α sur]0 ; 1].

Sur [1 ; + ∞ [, le minimum de f est $f(3) = 6 - 4\ln(3) \approx 1{,}6$ donc l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution sur [1 ; + ∞ [.

Ainsi, l'équation $f(x) = 0$ admet 1 unique solution α sur]0 ; + ∞[, et d'après les variations de f, on a

x	0		α		+∞
$f(x)$		−	0	+	

4. $$f''(x) = \frac{x^2(2x-4)-2x\left(x^2-4x+3\right)}{x^4} = \frac{2x^3-4x^2-2x^3+8x^2-6x}{x^4} = \frac{4x^2-6x}{x^4} = \frac{4x-6}{x^3}$$

Sur]0; +∞, on a $x^3 > 0$ donc $f''(x)$ est du signe de $4x - 6$ sur $]0; +\infty[$.

$4x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$ et $4x - 6 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{3}{2}$

La fonction f est donc concave sur $\left]0; \frac{3}{2}\right]$ et convexe sur $\left[\frac{3}{2}; +\infty\right[$.

La fonction f ne change qu'une seule fois de convexité sur $]0; +\infty[$. La courbe $\mathcal{C}$ possède donc un unique point d'inflexion d'abscisse $\frac{3}{2}$ et d'ordonnées $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{7}{2} - 4\ln\left(\frac{3}{2}\right)$.

EXERCICE 4 :

1. On a $B(1; 0; 0)$, $D(0; 1; 0)$, $E(0; 0; 1)$, $G(1; 1; 1)$ et $H(0; 1; 1)$.

2. **a.** $[EG]$, $[ED]$ et $[GD]$ sont des diagonales de carrés dont les côtés ont la même longueur.
Par conséquent $EG = ED = GD$.
Le triangle EGD est donc équilatéral.

b. Dans le triangle EGH rectangle en H on applique le théorème de Pythagore.

$$\begin{aligned} EG^2 &= EH^2 + GH^2 \\ &= 1 + 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

Par conséquent l'aire du triangle EGD est

$$\begin{aligned} \mathscr{A} &= \frac{\sqrt{3}}{4} EG^2 \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \times 2 \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

3. On a $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$.

$$\overrightarrow{BM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BH} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M-1=\dfrac{1}{3}\times(-1)\\ y_M=\dfrac{1}{3}\times 1\\ z_M=\dfrac{1}{3}\times 1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_M=\dfrac{2}{3}\\ y_M=\dfrac{1}{3}\\ z_M=\dfrac{1}{3}\end{cases}$$

Ainsi les coordonnées de M sont bien $\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$.

4. **a.** On a $\overrightarrow{EG}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{ED}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}\vec{n}.\overrightarrow{EG}&=-1+1+0\\&=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{n}.\overrightarrow{ED}&=0+1-1\\&=0\end{aligned}$$

Le vecteur $\vec{n}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (EGD).
Ainsi $\vec{n}$ est normal au plan (EGD).

b. Une équation cartésienne du plan (EGD) est de la forme $-x+y+z+d=0$.
Le point E appartient au plan (EGD) donc
$0+0+1+d=0 \Leftrightarrow d=-1$.
Une équation cartésienne du plan (EGD) est donc $-x+y+z-1=0$.

c. $\vec{n}$ est un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$.
Une représentation paramétrique de cette droite est donc :

$$\begin{cases} x=\dfrac{2}{3}-t\\ y=\dfrac{1}{3}+t \quad ,t\in\mathbb{R}.\\ z=\dfrac{1}{3}+t\end{cases}$$

5. **a.** Si on prend $t=\frac{1}{3}$ dans la représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$ on obtient les coordonnées $\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$.

$$-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}-1=0$$

Le point de coordonnées $\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$ appartient donc au plan (EGD) et à la droite $\mathcal{D}$.

Il s'agit par conséquent du point K.

b. On a

$$\begin{aligned} MK^2 &= \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Le volume de la pyramide $GEDM$ est donc

$$\begin{aligned} V &= \frac{\mathscr{A} \times MK}{3} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{3}}}{3} \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$