BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

BAC BLANC N°2

MATHÉMATIQUES

Jeudi 20 Mars 2025

Sujet 1

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

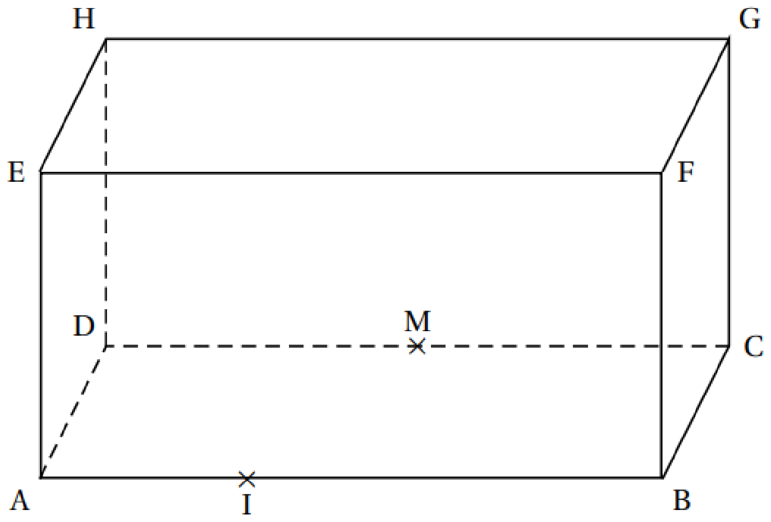
Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Exercice 1 (5 points)

On considère le pavé droit ABCDEFGH tel que AB = 3 et AD = AE = 1 représenté ci-dessous.



On considère le point I du segment [AB] tel que $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AI}$ et on appelle M le milieu du segment [CD].

On se place dans le repère orthonormé $\left(A\,;\ \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

1. Sans justifier, donner les coordonnées des points F, H et M.

2. **a.** Montrer que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\6\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (HMF).

   b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (HMF) est :

$$2x + 6y + 3z - 9 = 0.$$

   c. Le plan $\mathscr{P}$ dont une équation cartésienne est $5x + 15y - 3z + 7 = 0$ est-il parallèle au plan (HMF) ? Justifier la réponse.

3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (DG).

4. On appelle N le point d'intersection de la droite (DG) avec le plan (HMF).

   Déterminer les coordonnées du point N.

5. Le point R de coordonnées $\left(3\,;\ \frac{1}{4}\,;\ \frac{1}{2}\right)$ est-il le projeté orthogonal du point G sur le plan (HMF) ? Justifier la réponse.

Exercice 2 (4 points)

Pour chacune des affirmations, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Toute réponse non justifiée ne rapporte pas de point.

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (e^x - 4)x^2$

Affirmation1 :
La courbe représentative de la fonction f admet une asymptote horizontale en $-\infty$.

2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2e^x$

Affirmation 2 :
La courbe représentative de la fonction g admet 2 points d'inflexion

3. On considère la fonction f définie sur $\left]\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$ par $f(x) = x^2 - 4x + 3\ln(2x-1)$ et on note T la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 1

Affirmation 3 :
Une équation de T est : $y = 2x - 4$

4. On considère une suite (t_n) vérifiant, pour tout entier naturel n, la relation de récurrence $t_{n+1} = -0{,}8t_n + 18$

Affirmation 4 :
La suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $w_n = t_n - 10$ est géométrique

Exercice 3 (6 points)

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = x^2 - x\ln(x)$.

On admet que f est deux fois dérivable sur $]0\,;+\infty[$.
On note f' la fonction dérivée de la fonction f et f'' la fonction dérivée de la fonction f'.

Partie A : Étude de la fonction f

1. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
2. Pour tout réel x strictement positif, calculer $f'(x)$.
3. Montrer que pour tout réel x strictement positif, $f''(x) = \dfrac{2x-1}{x}$
4. Étudier les variations de la fonction f' sur $]0\,;+\infty[$, puis dresser le tableau des variations de la fonction f' sur $]0\,;+\infty[$.

On veillera à faire apparaître la valeur exacte de l'extremum de la fonction f' sur $]0\,;+\infty[$.
Les limites de la fonction f' aux bornes de l'intervalle de définition ne sont pas attendues.

5. Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

Partie B : Étude d'une fonction auxiliaire pour la résolution de l'équation $f(x) = x$

On considère dans cette partie la fonction g définie sur $]0\,;+\infty[$ par

$$g(x) = x - \ln(x)$$

On admet que la fonction g est dérivable sur $]0\,;+\infty[$, on note g' sa dérivée.

1. Pour tout réel strictement positif, calculer $g'(x)$, puis dresser le tableau des variations de la fonction g.

Les limites de la fonction g aux bornes de l'intervalle de définition ne sont pas attendues.

2. On admet que 1 est l'unique solution de l'équation $g(x) = 1$.

   Résoudre, sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$, l'équation $f(x) = x$.

Partie C : Étude d'une suite récurrente

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = f(u_n) = u_n^2 - u_n\ln(u_n)\,.$$

1. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n : $\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$
2. Justifier que la suite (u_n) converge.

   On appelle ℓ la limite de la suite (u_n) et on admet que ℓ vérifie l'égalité $f(\ell) = \ell$.
3. Déterminer la valeur de ℓ.

Exercice 4 (5 points)

Un jeu vidéo récompense par un objet tiré au sort les joueurs ayant remporté un défi. L'objet tiré peut être « commun » ou « rare ». Deux types d'objets communs ou rares sont disponibles, des épées et des boucliers.
Les concepteurs du jeu vidéo ont prévu que :

— la probabilité de tirer un objet rare est de 7 % ;

— si on tire un objet rare, la probabilité que ce soit une épée est de 80 % ;

— si on tire un objet commun, la probabilité que ce soit une épée est de 40 %.

Les parties A *et* B *sont indépendantes.*

Partie A

Un joueur vient de remporter un défi et tire au sort un objet. On note :

- R l'évènement « le joueur tire un objet rare » ;
- E l'évènement « le joueur tire une épée » ;
- $\overline{R}$ et $\overline{E}$ les évènements contraires des évènements R et E.

1. Dresser un arbre pondéré modélisant la situation, puis calculer $P(R \cap E)$.
2. Calculer la probabilité de tirer une épée.
3. Le joueur a tiré une épée. Déterminer la probabilité que ce soit un objet rare. Arrondir le résultat au millième.

Partie B

Un joueur remporte 30 défis.
On note X la variable aléatoire correspondant au nombre d'objets rares que le joueur obtient après avoir remporté 30 défis. Les tirages successifs sont considérés comme indépendants.

1. Déterminer, en justifiant, la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X. Préciser ses paramètres, ainsi que son espérance.
2. Déterminer $P(X < 6)$. Arrondir le résultat au millième.
3. Déterminer la plus grande valeur de k telle que $P(X \geqslant k) \geqslant 0,5$. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
4. Les développeurs du jeu vidéo veulent proposer aux joueurs d'acheter un « ticket d'or » qui permet de tirer N objets. La probabilité de tirer un objet rare reste de 7 %.

   Les développeurs aimeraient qu'en achetant un ticket d'or, la probabilité qu'un joueur obtienne au moins un objet rare lors de ces N tirages soit supérieure ou égale à $0,95$.

   Déterminer le nombre minimum d'objets à tirer pour atteindre cet objectif. On veillera à détailler la démarche mise en œuvre.