Terminales	**MATHEMATIQUES** : EPREUVE DE SPECIALITE	Sujet 2
	Janvier 2023	
Durée : 4 h	*Calculatrice autorisée*	

EXERCICE 1 : 5 points

Les douanes s'intéressent aux importations de casques audio portant le logo d'une certaine marque. Les saisies des douanes permettent d'estimer que :

- 20 % des casques audio portant le logo de cette marque sont des contrefaçons;
- 2 % des casques non contrefaits présentent un défaut de conception;
- 10 % des casques contrefaits présentent un défaut de conception.

L'agence des fraudes commande au hasard sur un site internet un casque affichant le logo de la marque. On considère les évènements suivants :

- C : « le casque est contrefait »;
- D : « le casque présente un défaut de conception »;
- $\overline{C}$ et $\overline{D}$ désignent respectivement les évènements contraires de C et D.

Dans l'ensemble de l'exercice, les probabilités seront arrondies à 10^{-3} si nécessaire.

Partie 1

1. Calculer $P(C \cap D)$. On pourra s'appuyer sur un arbre pondéré.
2. Démontrer que $P(D) = 0,036$.
3. Le casque a un défaut. Quelle est la probabilité qu'il soit contrefait?

Partie 2

On commande n casques portant le logo de cette marque. On assimile cette expérience à un tirage aléatoire avec remise. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de casques présentant un défaut de conception dans ce lot.

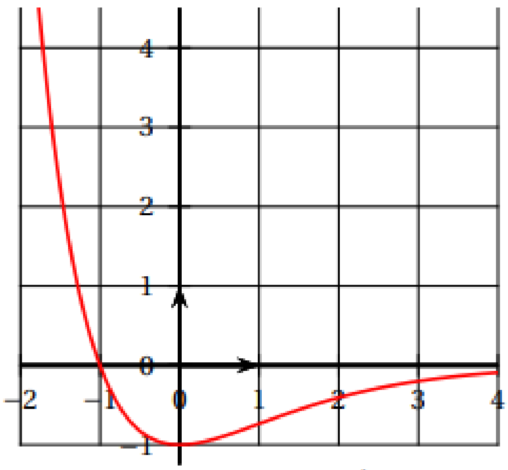
1. Dans cette question, $n = 35$.
   a. Justifier que X suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n,\ p)$ où $n = 35$ et $p = 0,036$.
   b. Calculer la probabilité qu'il y ait parmi les casques commandés, exactement un casque présentant un défaut de conception.
   c. Calculer $P(X \leqslant 1)$.
2. Dans cette question, n n'est pas fixé.
   Quel doit être le nombre minimal de casques à commander pour que la probabilité qu'au moins un casque présente un défaut soit supérieur à $0,99$?

EXERCICE 2 : 5 points

Partie 1

On donne ci-dessous, dans le plan rapporté à un repère orthonormé, la courbe représentant la fonction dérivée f' d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$.
À l'aide de cette courbe, conjecturer, en justifiant les réponses :

1. Le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. La convexité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.



Courbe représentant la **dérivée** f' de la fonction f.

Partie 2

On admet que la fonction f mentionnée dans la Partie 1 est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-x}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.
On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et on note f' et f'' les fonctions dérivées première et seconde de f respectivement.

1. **a.** Montrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x) = (-x-1)\mathrm{e}^{-x}$.

   b. Étudier les variations sur $\mathbb{R}$ de la fonction f et dresser son tableau de variations.

   c. Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[-2\,;\,-1]$ dont on donnera une valeur approchée à 10^{-1} près.

2. Déterminer, pour tout nombre réel x, l'expression de $f''(x)$ et étudier la convexité de la fonction f.

   Que représente pour la courbe $\mathscr{C}$ son point A d'abscisse 0 ?

EXERCICE 3 : 5 points

La population d'une espèce en voie de disparition est surveillée de près dans une réserve naturelle.
Les conditions climatiques ainsi que le braconnage font que cette population diminue de 10 % chaque année.
Afin de compenser ces pertes, on réintroduit dans la réserve 100 individus à la fin de chaque année.
On souhaite étudier l'évolution de l'effectif de cette population au cours du temps. Pour cela, on modélise l'effectif de la population de l'espèce par la suite (u_n) où u_n représente l'effectif de la population au début de l'année $2020+n$.
On admet que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 0$.
Au début de l'année 2020, la population étudiée compte 2 000 individus, ainsi $u_0 = 2000$.

1. Justifier que la suite (u_n) vérifie la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = 0,9u_n + 100.$$

2. Calculer u_1 puis u_2.

3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n : $1000 < u_{n+1} \leqslant u_n$.

4. La suite (u_n) est-elle convergente ? Justifier la réponse.

5. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 1000$.

  a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,9.

  b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 1000\left(1 + 0,9^n\right)$.

  c. Déterminer la limite de la suite (u_n).
  En donner une interprétation dans le contexte de cet exercice.

6. On souhaite déterminer le nombre d'années nécessaires pour que l'effectif de la population passe en dessous d'un certain seuil S (avec $S > 1000$).

  a. Déterminer le plus petit entier n tel que $u_n \leqslant 1020$.
  Justifier la réponse par un calcul.

  b. Dans le programme Python ci-contre, la variable n désigne le nombre d'années écoulées depuis 2020, la variable u désigne l'effectif de la population.
  Recopier et compléter ce programme afin qu'il retourne le nombre d'années nécessaires pour que l'effectif de la population passe en dessous du seuil S.

```
def population(S) :
  n=0
  u=2000

  while ......:
    u= ...
    n = ...
  return ...
```

EXERCICE 4 : 5 points

Dans l'espace, rapporté à un repère orthonormé $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère les points :

$$A(2 ; 0 ; 3),\ B(0 ; 2 ; 1), C(-1 ; -1 ; 2) \text{ et } D(3 ; -3 ; -1).$$

1. **Calcul d'un angle**

   a. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ et en déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.

   b. Calculer les longueurs AB et AC.

   c. À l'aide du produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, déterminer la valeur du cosinus de l'angle $\widehat{BAC}$ puis donner une valeur approchée de la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ au dixième de degré.

   d. Calculer les coordonnées du milieu E de [AB]

   e. Justifier que les droites (AB) et (CE) sont orthogonales.

   f. Calculer la distance du point A à la droite (AB) et en déduire que l'aire du triangle ABC est égale à $2\sqrt{6}$

2. **Calcul d'un volume**

   a. Soit le point $F(1 ; -1 ; 3)$. Montrer que les points A, B, C et F sont coplanaires.

   b. Vérifier que la droite (FD) est orthogonale au plan (ABC).

   En déduire la distance du point D au plan (ABC)

   c. Sachant que le volume d'un tétraèdre est égal au tiers de l'aire de sa base multiplié par sa hauteur, calculer le volume du tétraèdre ABCD.