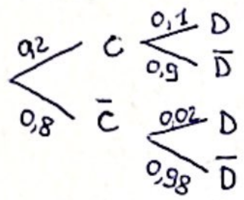
Compo Sujet 2

Exercice 1 : (5)

Partie 1 :



1) $P(C \cap D) = P(C) \times P_C(D)$
$= 0,2 \times 0,1$
$= 0,02.$
(0,5)

2) C et $\overline{C}$ forment une partition de l'univers
D'après la formule des probas totales,
$P(D) = P(C \cap D) + P(\overline{C} \cap D)$
$= 0,02 + P(\overline{C}) \times P_{\overline{C}}(D)$
$= 0,02 + 0,8 \times 0,02$
$= 0,02 + 0,016$ (1)
$= 0,036$

3) $P_D(C) = \dfrac{P(C \cap D)}{P(D)} = \dfrac{0,02}{0,036} = \dfrac{20}{36} = \dfrac{5}{9} \approx 0,556.$
(0,75)

Partie 2 :

1) On répète 35 fois de manière identique et indépendante la même épreuve de Bernoulli qui comporte 2 issues avec le succès S : "le casque présente un défaut" de proba $p = 0,036$.
Il s'agit d'un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 35$ et $p = 0,036$.
X compte le nombre de succès donc X suit la loi binomiale $B(35 ; 0,036)$. (0,5)

b) $P(X = 1) = \binom{35}{1} 0,036^1 (1 - 0,036)^{35-1}$
$\approx 0,362.$ (0,5)

c) $P(X \leqslant 1) = P(X=0) + P(X=1) = \binom{35}{0} 0,036^0 (1-0,036)^{35} + 0,362$
$\approx 0,639$ (0,75).

2) $P(X \geqslant 1) > 0,99$ } 0,25
$1 - P(X < 1) > 0,99$
$1 - P(X = 0) > 0,99$
$0,01 > P(X = 0)$
$0,01 > \binom{n}{0} 0,036^0 \times (1 - 0,036)^n$ } 0,25
$0,01 > 0,964^n$
$\ln 0,01 > n \ln 0,964$
$\dfrac{\ln 0,01}{\ln 0,964} < n$ } 0,25

$\dfrac{\ln 0,01}{\ln 0,964} \approx 125,6$ soit $\underbrace{126}_{0,25}$ casques. (1)

Exercice 2 : (5)

Partie 1 :

1) Sur $]-\infty ; -1]$, $f'(x) \geqslant 0$ donc f est croissante
Sur $[-1 ; +\infty[$, $f'(x) \leqslant 0$ donc f est décroissante (0,5)

2) Sur $]-\infty ; 0]$, f' est décroissante donc f est concave.
Sur $[0 ; +\infty[$, f' est croissante donc f est convexe. (0,5)

Partie 2 :

1. a) $f(x) = (x+2)e^{-x}$
$f'(x) = 1 \times e^{-x} + (x+2) \times (-e^{-x})$
$= e^{-x}(1 - x - 2)$ (0,75)
$= e^{-x}(-1 - x).$

b) $-1 - x = 0$
$-x = 1$
$x = -1$

x	$-\infty$ -1 $+\infty$
$-1-x$	+ 0 −
e^{-x}	+ +
$f'(x)$	+ 0 −
$f(x)$	↗ e ↘

(1)

c) $f(-2) = (-2+2)e^{-2} = 0$
Sur $[-2 ; -1]$, f est définie, continue et strictement croissante.
Elle prend ses valeurs dans $[0 ; e]$. (0,75)
$2 \in [0 ; e]$.
D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution dans cet intervalle.
$\alpha \approx -1,6$ (0,25)

2) $f'(x) = (-x - 1)e^{-x}$.
$f''(x) = -1e^{-x} + (-x-1) \times (-e^{-x})$
$= e^{-x}(-1 + x + 1).$
$= xe^{-x}.$

$f''(x) = 0 \iff xe^{-x} = 0$ $e^{-x} > 0$
$\iff x = 0$

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
$f''(x)$	− 0 +

(1)

f est concave sur $]-\infty ; 0]$ et est convexe sur $[0 ; +\infty[$.

Le point A représente le point d'inflexion
(0,25)

Exercice 3 : 5

1) $u_{n+1} = \underbrace{0,9\,u_n}_{} + 100\}$ + 100 : réintroduction + 100 individus.

× 0,9 correspond à la diminution de 10% (0,25)

2) $u_0 = 2000$

$u_1 = 2000 \times 0,9 + 100 = 1900$ (0,5)

$u_2 = 1900 \times 0,9 + 100 = 1810.$

3) Initialisation : pour $n = 0$, on a

$u_0 = 2000$ $\quad 1000 < u_1 \leqslant u_0$

$u_{0+1} = 1900$ L'initialisation est vérifiée.

Hérédité : Supposons qu'il existe un entier naturel k tel que $1000 < u_{k+1} \leqslant u_k$.

Mq $1000 \leqslant u_{k+2} \leqslant u_{k+1}$.

$1000 < u_{k+1} \leqslant u_k$

$900 < 0,9\,u_{k+1} \leqslant 0,9\,u_k$

$1000 < 0,9\,u_{k+1} + 100 \leqslant 0,9\,u_k + 100$

$1000 < u_{k+2} \leqslant u_{k+1}$.

L'hérédité est vérifiée.

Ccl : La récurrence est établie. (0,75)

Pour tt $n \in \mathbb{N}$, $1000 < u_{n+1} \leqslant u_n$.

4) La suite (u_n) est décroissante et minorée donc elle converge. (0,5)

5) a) $v_n = u_n - 1000 \Leftrightarrow u_n = v_n + 1000$

$v_{n+1} = u_{n+1} - 1000$

$= 0,9\,u_n + 100 - 1000$

$= 0,9(v_n + 1000) - 900$

$= 0,9\,v_n + 900 - 900$

$= 0,9\,v_n$

(v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,9$. (0,75)

b) $v_n = v_0 \times q^n$ $\quad v_0 = u_0 - 1000 = 2000 - 1000 = 1000$

$v_n = 1000 \times 0,9^n$

$u_n = v_n + 1000$

$= 1000 \times 0,9^n + 1000$ (0,5)

$= 1000(1 + 0,9^n)$.

c) $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,9^n = 0$ car $-1 < 0,9 < 1$

$\lim\limits_{n \to +\infty} 0,9^n + 1 = 1$.

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1000$ (0,5)

Dans un grand nombre d'années, l'effectif de la population se stabilisera autour de 1000 individus. (0,25)

6. a) $u_n \leqslant 1020$

$1000(1 + 0,9^n) \leqslant 1020$

$1 + 0,9^n \leqslant 1,02$

$0,9^n \leqslant 0,02$

$n \ln 0,9 \leqslant \ln 0,02$

$n \geqslant \dfrac{\ln 0,02}{\ln 0,9}$

$\dfrac{\ln 0,02}{\ln 0,9} \approx 37,13$ $\quad n = 38$ (0,25)

b) def population

```
n=0
u = 2000
While u ≥ S
   U = 0,9*U+100
   N = N+1
Return.
```

(0,75)

Exercice 4 : 5

1. a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\2\\-2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3\\-1\\-1\end{pmatrix}$ $\quad \dfrac{-2}{-3} \neq \dfrac{2}{-1}$

les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas proportionnelles.

Donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ non colinéaires. (0,5)

D'où A, B et C non alignés.

b) $AB = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{12}$. (0,5)

$AC = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{11}$

c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -2 \times (-3) + 2 \times (-1) + (-2) \times (-1)$

$= 6 - 2 + 2$

$= 6$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$

$6 = \sqrt{12} \times \sqrt{11} \times \cos \widehat{BAC}$

$\dfrac{6}{\sqrt{12} \times \sqrt{11}} = \cos \widehat{BAC}$ (0,75)

$\dfrac{\sqrt{33}}{11} = \cos \widehat{BAC}$ $\qquad \widehat{BAC} \approx 58,5°$.

d) $E\left(\dfrac{x_A + x_B}{2} ; \dfrac{y_A + y_B}{2} ; \dfrac{z_A + z_B}{2}\right)$

$E\left(\dfrac{2+0}{2} ; \dfrac{0+2}{2} ; \dfrac{3+1}{2}\right) = (1 ; 1 ; 2)$ (0,25)

e) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CE} = -2 \times 2 + 2 \times 2 + (-2) \times 0 = -4 + 4 = 0$

$\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CE}$ sont orthogonaux.

(AB) et (CE) orthogonales. (0,5)

f) (AB) et (CE) orthogonales.

E milieu de [AB].

Donc E est le projeté orthogonal de C sur (AB).

Donc la distance du point C à la droite (AB) vaut CE soit

$CE = \sqrt{2^2+2^2+0^2} = \sqrt{8}$ (0,5)

$\mathcal{A}_{ABC} = \dfrac{AB \times CE}{2} = \dfrac{\sqrt{12} \times \sqrt{8}}{2} = \dfrac{\cancel{2}\sqrt{3} \times 2\sqrt{2}}{\cancel{2}}$

$= 2\sqrt{6}$. (0,25)

2) A, B, C et F sont coplanaires si et seulement si il existe 2 réels x et y tels que $\vec{AF} = x\vec{AB} + y\vec{AC}$.

Autrement dit $\begin{cases} -1 = -2x + (-3y) \\ -1 = 2x - y \\ 0 = -2x - y \end{cases}$

$\vec{AF}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 = -2x - 3\times(-2x) \\ -1 = 2x + 2x \\ y = -2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = 4x \\ -1 = 4x \\ y = -2x \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1/4 \\ y = -\frac{1}{4} \times (-2) = \frac{1}{2} \end{cases}$

Donc $\vec{AF} = -\frac{1}{4}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}$ (0,75)

Donc A, B, C et F coplanaires.

b) $\vec{FD}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$ $\vec{FD}\cdot\vec{AB} = 2\times(-2) + (-2)\times 2 + (-4)\times(-2)$

$= -4 - 4 + 8$

$= 0$

$\vec{FD}\cdot\vec{AC} = 2\times(-3) - 2\times(-1) - 4\times(-1)$

$= -6 + 2 + 4$

$= 0$. (0,5)

(FD) orthogonale à 2 droites (AB) et (AC) incluses et sécantes dans (ABC).

Donc (FD) orthogonale à (ABC).

$FD = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$. (0,25)

La distance du point D au plan (ABC).

c) $\mathcal{V}_{ABCD} = \dfrac{1}{3} \times \mathcal{A}_{ABC} \times FD$

$= \dfrac{1}{3} \times 2\sqrt{6} \times 2\sqrt{6}$ (0,25)

$= 8$