BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

BAC BLANC N°2

MATHÉMATIQUES

Jeudi 4 avril 2024

Sujet 2

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Exercice 1 (4 points)

Pour chacune des affirmations, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Toute réponse non justifiée ne rapporte pas de point.

1. On considère les suites (u_n) et (v_n) telles que, pour tout entier naturel n,

$u_n = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n$ et $v_n = 1 + \left(\frac{1}{4}\right)^n$

On considère de plus une suite (w_n) qui, pour tout entier naturel n, vérifie $u_n \leq w_n \leq v_n$

Affirmation 1 : La suite (w_n) converge vers 1.

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1 + 2x^2)e^{x^2}$.

Affirmation 2 : La fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = xe^{x^2}$ est une primitive de la fonction f.

Les deux dernières affirmations sont en rapport avec la situation suivante :
On considère un système de communication binaire transmettant des 0 et des 1.
Chaque 0 ou 1 est appelé bit.
En raison d'interférences, il peut y avoir des erreurs de transmission : un 0 peut être reçu comme un 1 et, de même, un 1 peut être reçu comme un 0.
Un message de longueur huit bits est appelé un octet.
On admet que la probabilité qu'un octet soit transmis sans erreur est égale à 0,88.

3. On transmet successivement 10 octets de façon indépendante.

Affirmation 3 : La probabilité qu'au moins un octet soit transmis sans erreur est égale à $1 - 0{,}88^{10}$

4. Soit N un entier naturel. On transmet successivement N octets de façon indépendante.

Soit N_0 la plus grande valeur de N pour laquelle la probabilité que les N octets soient tous transmis sans erreur est supérieure ou égale à 0,1

Affirmation 4 : $N_0 = 19$.

Exercice 2 (6 points)

Dans une région touristique, une société propose un service de location de vélos pour la journée.

La société dispose de deux points de location distinctes, le point A et le point B. Les vélos peuvent être empruntés et restitués indifféremment dans l'un où l'autre des deux points de location.

On admettra que le nombre total de vélos est constant et que tous les matins, à l'ouverture du service, chaque vélo se trouve au point A ou au point B.

D'après une étude statistique :

- Si un vélo se trouve au point A un matin, la probabilité qu'il se trouve au point A le matin suivant est égale à $0,84$;
- Si un vélo se trouve au point B un matin la probabilité qu'il se trouve au point B le matin suivant est égale à $0,76$.

À l'ouverture du service le premier matin, la société a disposé la moitié de ses vélos au point A, l'autre moitié au point B.

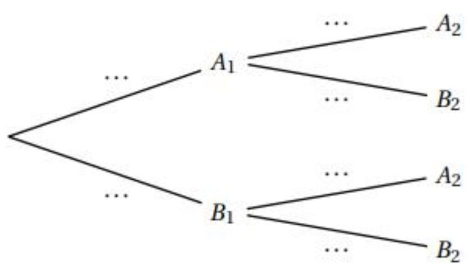
On considère un vélo de la société pris au hasard.

Pour tout entier naturel non nul n, on définit les évènements suivants :

- A_n : « le vélo se trouve au point A le n-ième matin »
- B_n : « le vélo se trouve au point B le n-ième matin ».

Pour tout entier naturel non nul n, on note a_n la probabilité de l'évènement A_n et b_n la probabilité de l'évènement B_n. Ainsi $a_1 = 0,5$ et $b_1 = 0,5$.

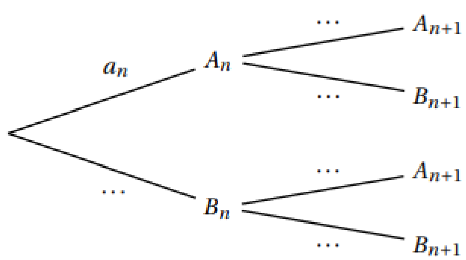
1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous qui modélise la situation pour les deux premiers matins :



2. **a.** Calculer a_2.

b. Le vélo se trouve au point A le deuxième matin. Calculer la probabilité qu'il se soit trouvé au point B le premier matin. La probabilité sera arrondie au millième.

3. **a.** Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous qui modélise la situation pour les n-ième et $n+1$-ième matins.



b. Justifier que pour tout entier naturel non nul n, $a_{n+1} = 0,6a_n + 0,24$.

4. Pour tout entier naturel n, on pose la suite (v_n) définie par $v_n = a_n - 0,6$

a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n, on a $a_n = 0,6 - 0,1 \times 0,6^{n-1}$.

c. Déterminer la limite de la suite (a_n) et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

5. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $a_n \geq 0,599$ et interpréter le résultat obtenu dans le contexte de l'exercice.

Exercice 3 (5 points)

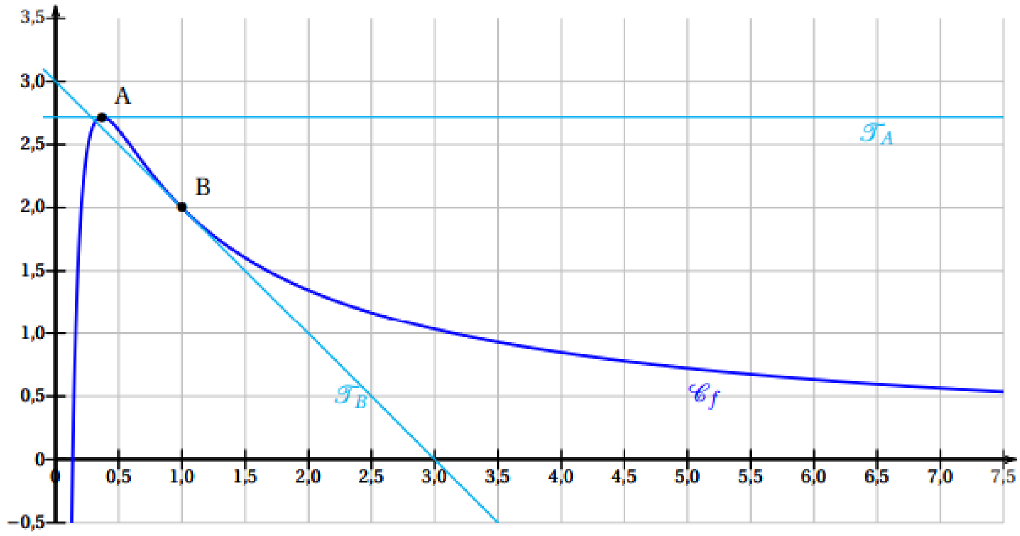
Sur le graphique ci-dessous, on a représenté dans un repère orthonormé :

— la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$;

— la tangente $\mathscr{T}_A$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A de coordonnées $\left(\frac{1}{e}\,;\,e\right)$;

— la tangente $\mathscr{T}_B$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point B de coordonnées $(1\,;2)$.

La droite $\mathscr{T}_A$ est parallèle à l'axe des abscisses. La droite $\mathscr{T}_B$ coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $(3;\,0)$ et l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0;\,3)$.



On note f' la fonction dérivée de f.

PARTIE I

1. Déterminer graphiquement les valeurs de $f'\left(\frac{1}{e}\right)$ et de $f'(1)$.
2. En déduire une équation de la droite $\mathscr{T}_B$.

PARTIE II

On suppose maintenant que la fonction f est définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2+\ln(x)}{x}.$$

1. Par le calcul, montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ passe par les points A et B et qu'elle coupe l'axe des abscisses en un point unique que l'on précisera.
2. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0 par valeurs supérieures, et la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
3. Montrer que, pour tout $x \in]0\,;\,\infty[$,

$$f'(x) = \frac{-1-\ln(x)}{x^2}.$$

4. Dresser le tableau de variations de f sur $]0\,;\,+\infty[$.
5. On note f'' la fonction dérivée seconde de f On admet que, pour tout $x \in]0\,;\,+\infty[$

$$f''(x) = \frac{1+2\ln(x)}{x^3}.$$

   Déterminer le plus grand intervalle sur lequel f est convexe.

Exercice 4 (5 points)

Soit ABCDEFGH un cube et I le centre du carré ADHE, c'est-à-dire, le milieu du segment [AH] et du segment [ED]. Soit J un point du segment [CG].
La section du cube ABCDEFGH par le plan (FIJ) est le quadrilatère FKLJ.

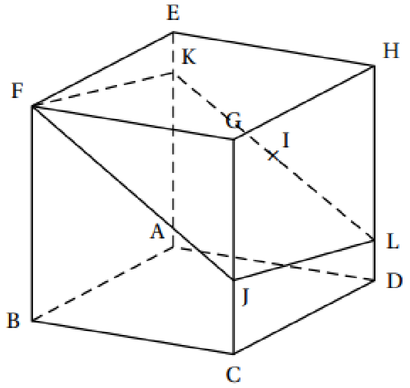


Figure 1

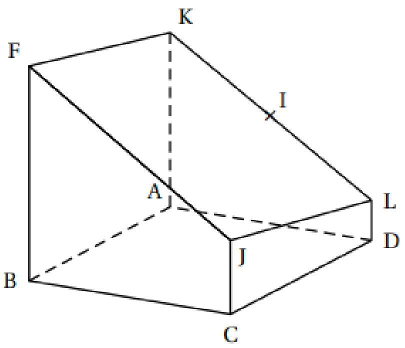


Figure 2

On se place dans le repère orthonormé $\left(A\,;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.
On a donc A(0 ; 0 ; 0), B(1 ; 0 ; 0), D(0 ; 1 ; 0) et E(0 ; 0 ; 1).
Les parties A *et* B *peuvent être traitées de manière indépendante.*

Partie A

Dans cette partie, le point J a pour coordonnées $\left(1\,;\ 1\,;\ \frac{2}{5}\right)$

1. Démontrer que les coordonnées du point I sont $\left(0\,;\ \frac{1}{2}\,;\ \frac{1}{2}\right)$.

2. a. Démontrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\3\\5\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (FIJ).

   b. Démontrer qu'une équation cartésienne du plan (FIJ) est

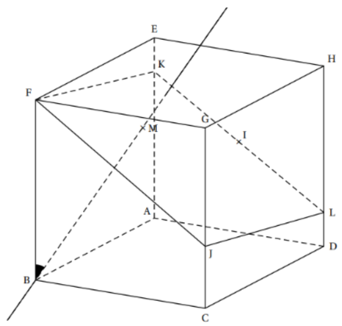
$$-x+3y+5z-4=0.$$

3. Soit d la droite orthogonale au plan (FIJ) et passant par B.

   a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d.

   b. On note M le point d'intersection de la droite d et du plan (FIJ).

   Démontrer que M $\left(\frac{6}{7}\,;\ \frac{3}{7}\,;\ \frac{5}{7}\right)$.



4. a. Calculer $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{BF}$.

   b. En déduire une valeur approchée au degré près de l'angle $\widehat{MBF}$.

Partie B

Dans cette partie, J est un point quelconque du segment $[CG]$.
Ses coordonnées sont donc $(1\,;1\,;a)$ où a est un réel appartenant à l'intervalle $[0\,;1]$.
On admet que les coordonnées de K sont $\left(0\,;0\,;-\frac{a}{2}+1\right)$ et celles de L sont $\left(0;1;\frac{a}{2}\right)$.

1. Montrer que $FKLJ$ est un parallélogramme.
2. Pour quelle(s) valeur(s) de a, le quadrilatère $FKLJ$ est un losange ?