Exercice 3 /5

(I) 1) $f'(\frac{1}{e}) = 0$ car la tangente T_A au point A d'abscisse $\frac{1}{e}$ est horizontale

(0,5) $f'(1) = -1$ car le coefficient directeur de la tangente T_B au point B d'abscisse 1 est égal à -1

(I) 2) T_B est la droite de coefficient directeur -1 et dont l'ordonnée à l'origine est 3

(0,25 donc T_B : $y = -x + 3$

(II) $f(x) = \frac{2+\ln(x)}{x}$

1) $f(\frac{1}{e}) = \frac{2+\ln(\frac{1}{e})}{\frac{1}{e}} = \frac{2-\ln(e)}{\frac{1}{e}} = \frac{2-1}{\frac{1}{e}} = \frac{1}{\frac{1}{e}} = 1 \times \frac{e}{1} = e$ donc C_f passe par $A(\frac{1}{e} ; e)$

$f(1) = \frac{2+\ln 1}{1} = \frac{2+0}{1} = 2$ donc C_f passe par $B(1;2)$

(0,75) $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2+\ln(x)}{x} = 0 \Leftrightarrow 2+\ln(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = -2 \Leftrightarrow x = e^{-2}$

donc C_f coupe l'axe des abscisses en un seul point d'abcisse e^{-2}

2) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to 0^+} 2 = 2 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty\end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to 0^+} 2+\ln(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} x = 0^+\end{array}\right\}$ $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$

(0,5)

en $+\infty$, $f(x) = \frac{2+\ln(x)}{x} = \frac{2}{x} + \frac{\ln(x)}{x}$

(0,75 $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ (croissances comparées) d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

3) $f = \frac{u}{v}$ $\quad u(x) = 2+\ln(x)$ $\quad v(x) = x$ $\quad$ or $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$u'(x) = \frac{1}{x}$ $\quad v'(x) = 1$

(0,5 $f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - (2+\ln x) \times 1}{x^2} = \frac{1-2-\ln x}{x^2} = \frac{-1-\ln x}{x^2}$

4)

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$-1-\ln x$	||	$+$	0	$-$	
x^2	||		$+$		
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	
$f(x)$	|| $-\infty$	$\nearrow$	e	$\searrow$	0

0,5

0,25

0,25

1

$-1-\ln x \geqslant 0$

$\Leftrightarrow -\ln x \geqslant 1$

$\Leftrightarrow \ln x \leqslant -1$

$\Leftrightarrow x \leqslant e^{-1}$

$f(e^{-1}) = f(\frac{1}{e}) = e$ d'après 1).

5) $f''(x) = \dfrac{1+2\ln(x)}{x^3}$

x	0		$e^{-1/2}$		$+\infty$
$1+2\ln x$	||	$-$	0	$+$	
x^3	||		$+$		
$f''(x)$	||	$-$	0	$+$	

$1+2\ln x \geqslant 0$

$\Leftrightarrow 2\ln x \geqslant -1$

$\Leftrightarrow \ln x \geqslant -\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x \geqslant e^{-1/2}$

0,75

f est convexe lorsque $f''(x) \geqslant 0$

donc le plus grand intervalle sur lequel f est convexe est $[e^{-1/2} ; +\infty[$

Exercice 4 $A(0;0;0)$ $H(0;1;1)$ $F(1;0;1)$

(A) 1). I est le milieu de $[AH]$ donc $I\left(\frac{0+0}{2};\frac{0+1}{2};\frac{0+1}{2}\right)$ soit $I\left(0;\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ 0,5

2). a) $\vec{FI}\begin{pmatrix}0-1\\ \frac{1}{2}-0\\ \frac{1}{2}-1\end{pmatrix}$ $\vec{FI}\begin{pmatrix}-1\\ 1/2\\ -1/2\end{pmatrix}$ $\vec{FJ}\begin{pmatrix}1-1\\ 1-0\\ \frac{2}{5}-1\end{pmatrix}$ $\vec{FJ}\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -3/5\end{pmatrix}$

$\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\ 3\\ 5\end{pmatrix}$ $\vec{n}\cdot\vec{FI}=-1\times(-1)+3\times\left(\frac{1}{2}\right)+5\times\left(-\frac{1}{2}\right)=1+\frac{3}{2}-\frac{5}{2}=0$

$\vec{n}\cdot\vec{FJ}=-1\times0+3\times1+5\times\left(-\frac{3}{5}\right)=0+3-3=0$ 1

donc $\vec{n}$ est normal au plan (FIJ)

b) une équation du plan (FIJ) de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\ 3\\ 5\end{pmatrix}$ est de la forme $-x+3y+5z+d=0$

or $F(1;0;1)\in(FIJ)$ d'où $-1+3\times0+5\times1+d=0 \iff 4+d=0 \iff d=-4$ 0,5

ainsi $(FIJ): -x+3y+5z-4=0$

3) a) d est orthogonale à (FIJ) donc $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\ 3\\ 5\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d

or d passe par $B(1;0;0)$ d'où $d: \begin{cases}x=1-t\\ y=3t\\ z=5t\end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$ 0,5

b). M est l'intersection de la droite d et du plan (FIJ) d'où

$-(1-t)+3(3t)+5(5t)-4=0$ 0,75

$\iff -1+t+9t+25t-4=0$

$\iff 35t=5$

$\iff t=\frac{1}{7}$ alors $\begin{cases}x=1-t=1-\frac{1}{7}=\frac{6}{7}\\ y=3t=3\times\frac{1}{7}=\frac{3}{7}\\ z=5t=5\times\frac{1}{7}=\frac{5}{7}\end{cases}$ donc $M\left(\frac{6}{7};\frac{3}{7};\frac{5}{7}\right)$

4) a) $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix} 6/7-1 \\ 3/7-0 \\ 5/7-0 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix} -1/7 \\ 3/7 \\ 5/7 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BF}\begin{pmatrix} 1-1 \\ 0-0 \\ 1-0 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BF}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{BF} = -\frac{1}{7}\times 0 + \frac{3}{7}\times 0 + \frac{5}{7}\times 1 = \frac{5}{7}$ (0,25

b) $\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{BF} = \|\overrightarrow{BM}\|\times\|\overrightarrow{BF}\|\times\cos(\widehat{MBF})$ or $\|\overrightarrow{BM}\| = \sqrt{\left(\frac{-1}{7}\right)^2+\left(\frac{3}{7}\right)^2+\left(\frac{5}{7}\right)^2} = \frac{\sqrt{35}}{7}$

$\|\overrightarrow{BF}\| = \sqrt{0^2+0^2+1^2} = 1$

d'où $\frac{\sqrt{35}}{7}\times 1\times\cos(\widehat{MBF}) = \frac{5}{7}$

0,5

$\Leftrightarrow \cos(\widehat{MBF}) = \frac{5}{7}\times\frac{7}{\sqrt{35}} \Leftrightarrow \cos(\widehat{MBF}) = \frac{5}{\sqrt{35}} \approx 0,845$

d'où $\widehat{MBF} = 32°$

(B) $F(1;0;1)$ $J(1;1;a)$ $K(0;0;-\frac{a}{2}+1)$ $L(0;1;\frac{a}{2})$

1) $\overrightarrow{FK}\begin{pmatrix} 0-1 \\ 0-0 \\ -\frac{a}{2}+1-1 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{FK}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -\frac{a}{2} \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{JL}\begin{pmatrix} 0-1 \\ 1-1 \\ \frac{a}{2}-a \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{JL}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -\frac{a}{2} \end{pmatrix}$

0,5

on a $\overrightarrow{FK} = \overrightarrow{JL}$ donc FKLJ est un parallélogramme.

2) Le parallélogramme FKLJ est un losange si ses diagonales FL et KJ sont perpendiculaires (ou si ses cotés consécutifs FK et KL sont de même longueur)

or $\overrightarrow{FL}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \frac{a}{2}-1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{KJ}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{3a}{2}-1 \end{pmatrix}$ sont orthogonaux si

0,5

$\overrightarrow{FL}\cdot\overrightarrow{KJ} = 0 \Leftrightarrow -1\times 1 + 1\times 1 + \left(\frac{a}{2}-1\right)\left(\frac{3a}{2}-1\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(\frac{a}{2}-1\right)\left(\frac{3a}{2}-1\right) = 0$

$\Leftrightarrow \frac{a}{2}-1 = 0$ ou $\frac{3a}{2}-1 = 0$

$\Leftrightarrow \frac{a}{2} = 1$ ou $\frac{3a}{2} = 1$

$\Leftrightarrow a = 2$ ou $a = \frac{2}{3}$

or $a \in [0;1]$

donc FKLJ est un losange si $a = \frac{2}{3}$