BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

BAC BLANC N°2

MATHÉMATIQUES

Vendredi 21 Mars 2025

Sujet 2

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Exercice 1 (4 points)

Pour chacune des affirmations, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Toute réponse non justifiée ne rapporte pas de point.

1. On considère l'équation (E) : $\ln(6x - 2) + \ln(2x - 1) = \ln(x)$

<u>**Affirmation 1**</u> : L'équation (E) admet 2 solutions dans $\left]\frac{1}{2} ; +\infty\right[$

2. On considère la fonction f définie sur $]\,0 ; +\infty\,[$ par $f(x) = 3\ln(x) - x$
et on note T la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse e

<u>**Affirmation 2 :**</u> Une équation de T est $y = \left(\frac{3-e}{e}\right)x$

3. On considère la fonction f définie sur $]\,0 ; +\infty\,[$ par $f(x) = x\ln(x^2)$ et on note $f\,'$ la fonction dérivée de f

<u>**Affirmation 3 :**</u> Pour tout réel $x > 0$, $f\,'(x) = 2\ln(x) + 2$

4. <u>**Affirmation 4 :**</u> Le plus petit entier n tel que $2^n > 3^{2025}$ est $n = 3210$

Exercice 2 (6 points)

La partie C est indépendante des parties A et B.

Un robot est positionné sur un axe horizontal et se déplace plusieurs fois d'un mètre sur cet axe, aléatoirement vers la droite ou vers la gauche.
Lors du premier déplacement, la probabilité que le robot se déplace à droite est égale à $\frac{1}{3}$.
S'il se déplace à droite, la probabilité que le robot se déplace de nouveau à droite lors du déplacement suivant est égale à $\frac{3}{4}$.
S'il se déplace à gauche, la probabilité que le robot se déplace de nouveau à gauche lors du déplacement suivant est égale à $\frac{1}{2}$.
Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note :

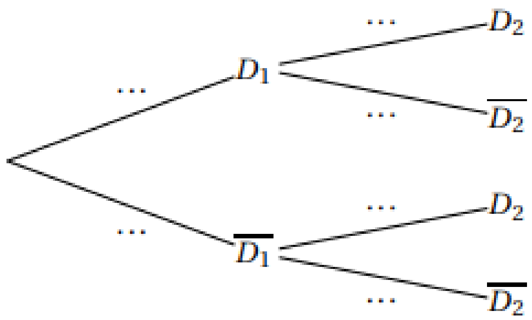
- D_n l'évènement : « le robot se déplace à droite lors du n-ième déplacement » ;
- $\overline{D_n}$ l'évènement contraire de D_n ;
- p_n la probabilité de l'évènement D_n.

On a donc $p_1 = \frac{1}{3}$.

Partie A : étude du cas particulier où $n = 2$

Dans cette partie, le robot réalise deux déplacements successifs.

1. Reproduire et compléter l'arbre pondéré suivant :



2. Déterminer la probabilité que le robot se déplace deux fois à droite.
3. Montrer que $p_2 = \dfrac{7}{12}$.
4. Le robot s'est déplacé à gauche lors du deuxième déplacement. Quelle est la probabilité qu'il se soit déplacé à droite lors du premier déplacement?

Partie B : étude de la suite (p_n).

On souhaite estimer le déplacement du robot au bout d'un nombre important d'étapes.

1. Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a :

$$p_{n+1} = \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}.$$

   On pourra s'aider d'un arbre.

2. **a.** Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a :

$$p_n \leqslant p_{n+1} < \frac{2}{3}.$$

   b. La suite (p_n) est-elle convergente? Justifier.

3. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, par $u_n = p_n - \dfrac{2}{3}$.

   a. Montrer que la suite (u_n) est géométrique et préciser son premier terme et sa raison.

   b. Déterminer la limite de la suite (p_n) et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie C

Dans cette partie, on considère un autre robot qui réalise dix déplacements d'un mètre indépendants les uns des autres, chaque déplacement vers la droite ayant une probabilité fixe égale à $\dfrac{3}{4}$.
Quelle est la probabilité qu'il revienne à son point de départ au bout des dix déplacements?
On arrondira le résultat à 10^{-3} près.

Exercice 3 (5 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On considère :

- les points $A(-2 ; 0 ; 2)$, $B(-1 ; 3 ; 0)$, $C(1 ; -1 ; 2)$ et $D(0; 0; 3)$.
- la droite $\mathscr{D}_1$ dont une représentation paramétrique est $\left\{\begin{array}{lll} x & = & t \\ y & = & 3t \\ z & = & 3+5t \end{array}\right.$ avec $t \in \mathbb{R}$.
- la droite $\mathscr{D}_2$ dont une représentation paramétrique est $\left\{\begin{array}{lll} x & = & 1+3s \\ y & = & -1-5s \\ z & = & 2-6s \end{array}\right.$ avec $s \in \mathbb{R}$.

1. Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. **a.** Démontrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}$ est orthogonal au plan (ABC).

b. Justifier qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est :

$$x+3y+5z-8=0.$$

c. En déduire que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

3. **a.** Justifier que la droite $\mathscr{D}_1$ est la hauteur du tétraèdre ABCD issue de D.
On admet que la droite $\mathscr{D}_2$ est la hauteur du tétraèdre ABCD issue de C.

b. Démontrer que les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont sécantes et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

4. **a.** Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H du point D sur le plan (ABC).

b. Calculer la distance du point D au plan (ABC).
Arrondir le résultat au centième.

Exercice 4 (5 points)

Partie A : Etude d'une fonction auxilliaire

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x+2)e^{x-4} - 2$

1. Déterminer la limite de g en $+\infty$
2. a. Montrer que pour tout réel x , $g(x) = \frac{xe^x+2e^x}{e^4} - 2$
   b. En déduire que la limite de g en $-\infty$ vaut -2
3. On admet que la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note g' sa dérivée.

   Justifier que $g'(x) = (x+3)e^{x-4}$ puis dresser le tableau de variation de g
4. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$
5. En déduire le signe de la fonction g sur $\mathbb{R}$
6. A l'aide de la calculatrice, donner un encadrement d'amplitude 10^{-3} de α

Partie B : Etude de la fonction *f*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - x^2e^{x-4}$

1. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$
2. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa dérivée.
   On admet par ailleurs que, pour tout réel x , $f'(x) = -x\,g(x)$ où la fonction g est celle définie à la partie A.
   Etudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$
3. Démontrer que le maximum de la fonction f sur $[\,0\,;\,+\infty\,[$ est égal à $\frac{\alpha^3}{\alpha+2}$