Exercice 1

Partie A

1. **a.** D'une année à l'autre, le nombre de panneaux solaires diminue de 2 % donc il est multiplié par 0,98 puis on installe 250 nouveaux panneaux d'où $u_{n+1} = 0{,}98u_n + 250$
b. D'après la calculatrice, on a $u_{67} \approx 11\,999$ et $u_{68} \approx 12\,009$ donc le nombre de panneaux solaires sera strictement supérieur à 12 000 au bout de 68 ans (soit en 2 088)
c.

```
u = 10560
n = 0
while u ⩽ 12000 :
    u = 0,98 * u + 250
    n = n + 1
```

2. Montrons, **par récurrence**, que pour tout entier n, $u_n \leq 12\,500$

Initialisation : On a $u_0 = 10\,560 \leq 12\,500$, la propriété est donc vraie pour $n = 0$.

Hérédité : On suppose qu'il existe un rang k ≥ 0 tel que $u_k \leq 12\,500$
et on cherche à démontrer alors que $u_{k+1} \leq 12\,500$

Or $u_k \leq 12\,500$

$\Leftrightarrow$ $0{,}98\, u_k \leq 12\,500 \times 0{,}98$

$\Leftrightarrow$ $0{,}98u_k + 250 \leq 12\,250 + 250$

$\Leftrightarrow$ $u_{k+1} \leq 12\,500$ donc la propriété est vraie au rang k+1, l'hérédité est ainsi démontrée

Conclusion : la propriété est vraie pour n = 0 et elle est héréditaire, donc pour tout entier n, on a $u_n \leq 12\,500$

3. Pour tout entier n, $u_{n+1} - u_n = 0{,}98u_n + 250 - u_n = -0{,}02u_n + 250$

or d'après la question précédente, $u_n \leq 1520$,

donc $-0{,}02u_n \geq -0{,}02 \times 12\,500$

c'est-à -dire $-0{,}02u_n \geq -250$

par conséquent, $-0{,}02u_n + 250 \geq 0$

donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$, ce qui prouve que la suite (u_n) est croissante .

4. a. $v_n = u_n - 12\,500$ donc $u_n = v_n + 12\,500$

Si $v_n = u_n - 12\,500$ *alors* $v_{n+1} = u_{n+1} - 12\,500$

$= 0{,}98u_n + 250 - 12\,500$

$= 0{,}98u_n - 12\,250$

$= 0{,}98(v_n + 12\,500) - 12\,250$ car $u_n = v_n + 12\,500$

$= 0{,}98v_n + 12\,250 - 12\,250$

$= 0{,}98v_n$ donc (v_n) est une suite géométrique de raison q = 0,98

et de 1er terme $v_0 = u_0 - 12\,500 = 10\,560 - 12\,500 = -1\,940$

b. Puisque (v_n) est une suite géométrique de raison q = 0,98 et de 1er terme $v_0 = -1\,940$
alors $v_n = v_0 \times q^n = -1\,940 \times 0{,}98^n$

c. $u_n = v_n + 12\,500$ donc $u_n = -1\,940 \times 0{,}98^n + 12\,500$

d. $u_{30} = -1\,940 \times 0{,}98^{30} + 12\,500 \approx 11\,441{,}76$ ce qui signifie que la centrale Big Sun possèdera 11 442 panneaux solaires dans 30 ans, c'est-à-dire en 2 050.

Partie B $f(x) = 12\,500 - 500e^{-0{,}02x + 1{,}4}$

1. $e^{-0{,}02x+1{,}4}$ *est de la forme* e^u avec $u(x) = -0{,}02x + 1{,}4$ d'où $u'(x) = -0{,}02$

ainsi la dérivée de $e^{-0{,}02x+1{,}4}$ *est* $-0{,}02e^{-0{,}02x+1{,}4}$

donc $f'(x) = -500 \times (-0{,}02\, e^{-0{,}02x+1{,}4})$

donc $f'(x) = 10\, e^{-0{,}02x+1{,}4}$.

$10 > 0$ et $e^{-0{,}02x+1{,}4} > 0$ donc $10\, e^{-0{,}02x+1{,}4} > 0$ donc $f'(x) > 0$.

$f' > 0$ sur $[\,0\,;+\infty\,[$ donc f est strictement croissante sur $[\,0\,;+\infty\,[$.

2. $f(x) > 12\,000$

$\Leftrightarrow 12500 - 500e^{-0{,}02x+1{,}4} > 12\,000$

$\Leftrightarrow -500e^{-0{,}02x+1{,}4} > 12\,000 - 12500$

$\Leftrightarrow e^{-0{,}02x+1{,}4} < \frac{-500}{-500}$

$\Leftrightarrow e^{-0{,}02x+1{,}4} < 1$

$\Leftrightarrow e^{-0{,}02x+1{,}4} < e^0$ (car $e^0 = 1$)

$\Leftrightarrow -0{,}02x + 1{,}4 < 0$

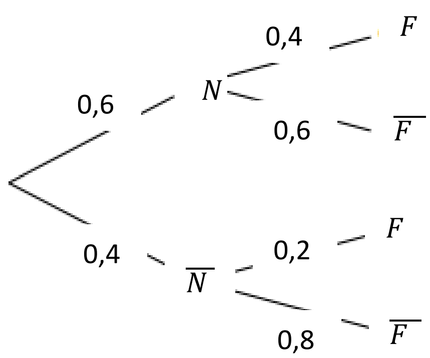
$\Leftrightarrow -0{,}02x < -1{,}4$

$\Leftrightarrow x > \frac{-1{,}4}{-0{,}02}$

$\Leftrightarrow x > 70$ donc le nombre de panneaux solaires dépassera 12 000 dans plus de 70 ans.

Exercice 2

1/



2/ N et $\overline{N}$ forment une partition de l'univers, donc d'après la formule des probabilités totales, on a

$p(F) = p(N \cap F) + p(\overline{N} \cap F)$
$= p(N) \times p_N(F) + p(\overline{N}) \times p_{\overline{N}}(F)$
$= 0{,}6 \times 0{,}4 + 0{,}4 \times 0{,}2$
$= 0{,}24 + 0{,}08$
$= 0{,}32$ donc la probabilité que le bonbon choisi soit au goût « farceur » est égale à 0,32

3/ La probabilité recherchée est $p_F(N) = \frac{p(N\cap F)}{p(F)} = \frac{0{,}24}{0{,}32} = \frac{3}{4} = 0{,}75$

4/ a) on a $P(X = 0{,}3) = P(N \cap F) = 0{,}6 \times 0{,}4 = 0{,}24$

$P(X = 0{,}4) = P(\overline{N} \cap F) = 0{,}4 \times 0{,}2 = 0{,}08$

$P(X = 0{,}1) = P(N \cap \bar{F}) + P(\overline{N} \cap \bar{F}) = 0{,}6 \times 0{,}6 + 0{,}4 \times 0{,}8 = 0{,}68$

Ainsi, la loi de probabilité de X est :

X	0,1	0,3	0,4
P(X)	0,68	0,24	0,08

b) $E(X) = 0{,}1 \times 0{,}68 + 0{,}3 \times 0{,}24 + 0{,}4 \times 0{,}08 = 0{,}172$

ce qui signifie que pour un grand nombre de bonbons, le coût moyen d'un bonbon est de 0,172 €

c) Puisqu'un sachet contient 25 bonbons, le coût moyen d'un sachet est alors de $25 \times 0{,}172$ € *soit* 4,30 €

Exercice 3

1) $\overrightarrow{EG} = \frac{2}{3}\,\overrightarrow{EF}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_G-(-1) \\ y_G-5 \\ z_G-3 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_G+1 \\ y_G-5 \\ z_G-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G + 1 = \frac{4}{3} \\ y_G - 5 = -\frac{2}{3} \\ z_G - 3 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \frac{4}{3} - 1 \\ y_G = -\frac{2}{3} + 5 \\ z_G = -4 + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \frac{1}{3} \\ y_G = \frac{13}{3} \\ z_G = -1 \end{cases}$$

donc les coordonnées du point G sont ($\frac{1}{3}$; $\frac{13}{3}$; -1).

2) Les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ $et\ \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires car $\frac{-2}{2} \neq \frac{3}{-2} \neq \frac{-2}{-2}$
donc les points A, B et C ne sont pas alignés.

3) $\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$ d'où

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 2\alpha - 2\beta \\ -2 = -2\alpha + 3\beta \\ 3 = -2\alpha - 2\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\beta = 2\alpha - 1 \\ -2 = -2\alpha + 3\beta \\ 3 = -2\alpha - 2\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \frac{2\alpha-1}{2} \\ -2 = -2\alpha + 3 \times \frac{2\alpha-1}{2} \\ 3 = -2\alpha - 2 \times \frac{2\alpha-1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \frac{2\alpha-1}{2} \\ -2 = -2\alpha + \frac{6\alpha-3}{2} \\ 3 = -2\alpha - (2\alpha - 1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \frac{2\alpha-1}{2} \\ -2 = -2\alpha + 3\alpha - \frac{3}{2} \\ 3 = -2\alpha - 2\alpha + 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \frac{2\alpha-1}{2} \\ -2 + \frac{3}{2} = \alpha \\ 3 - 1 = -4\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \frac{2\alpha-1}{2} \\ -\frac{1}{2} = \alpha \\ \frac{2}{-4} = \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \frac{2\times(-\frac{1}{2})-1}{2} \\ -\frac{1}{2} = \alpha \\ -\frac{1}{2} = \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -1 \\ -\frac{1}{2} = \alpha \\ -\frac{1}{2} = \alpha \end{cases}$$

on a donc $\alpha = -\frac{1}{2}$ et $\beta = -1$ Ainsi $\overrightarrow{AD} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

4) Les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ $et\ \overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires car $\frac{3}{2} \neq \frac{-5}{-2} \neq \frac{5}{-2}$ donc les droites (AB) et (CD) ne sont pas parallèles.

Or, $\overrightarrow{AD} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ ce qui prouve que les points A, B, C et D sont coplanaires, donc on en déduit que les droites (AB) et (CD) sont coplanaires et non parallèles, elles sont donc sécantes.