Terminales Spé Maths **DS n° 1 :** correction

Exercice 1 :

1. La droite $\mathcal{D}$ passe par l'origine du repère et représente donc une fonction linéaire donc son équation est du type $y = ax$

   Et puisque $\mathcal{D}$ passe par la point A de coordonnées (0,5 ; 1)
   elle a pour coefficient directeur $m = \frac{y_A - y_O}{x_A - x_O} = \frac{1}{0{,}5} = 2$
   d'où une équation de $\mathcal{D}$ est $y = 2x$

2. La tangente T à la courbe C au point d'abscisse 1 est parallèle à l'axe des abscisses donc son coefficient directeur est nul, ainsi $f'(1) = 0$

Partie B $f(x) = 2xe^{-0{,}5x^2}$

1. $f = u \times v$ avec $u(x) = 2x$ et $v(x) = e^{-0{,}5x^2}$
   $u'(x) = 2$ $v'(x) = -0{,}5 \times 2x\, e^{-0{,}5x^2} = -xe^{-0{,}5x^2}$

   Or $(uv)' = u'v + uv'$ d'où $f'(x) = 2e^{-0{,}5x^2} + 2x \times (-xe^{-0{,}5x^2})$
   $= 2e^{-0{,}5x^2} - 2x^2e^{-0{,}5x^2}$
   $= (2 - 2x^2)e^{-0{,}5x^2}$

2.

x	0		1		3
$e^{-0{,}5x^2}$		+			
$2 - 2x^2$		+	0	−	
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	0	↗	$2e^{-0{,}5}$	↘	$6e^{-4{,}5}$

$2 - 2x^2 = 0$
$\Leftrightarrow 2x^2 = 2$
$\Leftrightarrow x^2 = 1$
$a = -2 < 0$ $\Leftrightarrow x = 1$ *ou* $x = -1$

(mais $-1 \notin [\,0\,;\,3\,]$)

3. Le maximum de f est $f(1) = 2e^{-0{,}5} \approx 1{,}21$, soit 1,21 millions de lits occupés.
   Donc le nombre de lits occupés lors du pic de la maladie a bien dépassé 1,2 million.

Exercice 2

1/ D'une année à l'autre, le nombre d'abonnés diminue de 15 % donc il est multiplié par 0,85 mais il y a aussi 1 800 nouveaux abonnés, soit 1,8 milliers d'où $u_{n+1} = 0{,}85\,u_n + 1{,}8$

2/ L'année 2025 correspond à u_3 , or on a $u_0 = 8$ et

$u_1 = 0{,}85 \times u_0 + 1{,}8 = 0{,}85 \times 8 + 1{,}8 = 8{,}6$

$u_2 = 0{,}85 \times u_1 + 1{,}8 = 0{,}85 \times 8{,}6 + 1{,}8 = 9{,}11$

$u_3 = 0{,}85 \times u_2 + 1{,}8 = 0{,}85 \times 9{,}11 + 1{,}8 = 9{,}5435$ ainsi en 2025, il y avait 9 544 abonnés.

3/ Montrons, **par récurrence**, que pour tout entier n $u_n \leq 12$

Initialisation : Pour $n = 0$ **, o**n a $u_0 = 8 \leq 12$, la propriété est donc vraie pour $n = 0$.

Hérédité : On suppose qu'il existe un rang k ≥ 0 tel que $u_k \leq 12$
et on cherche à démontrer alors que $u_{k+1} \leq 12$

Or $u_k \leq 12$
$\Leftrightarrow$ $0{,}85\,u_k \leq 12 \times 0{,}85$
$\Leftrightarrow$ $0{,}85u_k + 1{,}8 \leq 10{,}2 + 1{,}8$
$\Leftrightarrow$ $u_{k+1} \leq 12$ donc la propriété est vraie au rang k+1, l'hérédité est ainsi démontrée

Conclusion : la propriété est vraie pour n = 0 et elle est héréditaire, donc, d'après le principe de récurrence pour tout entier n, on a $u_n \leq 12$ ce qui prouve que (u_n) est majorée par 12.

Cela signifie que le nombre d'abonnés restera toujours inférieur à 12 000.

4/ a. $v_n = u_n - 12$ donc $u_n = v_n + 12$

Si $v_n = u_n - 12$ *alors* $v_{n+1} = u_{n+1} - 12$

$= 0{,}85u_n + 1{,}8 - 12$
$= 0{,}85u_n - 10{,}2$
$= 0{,}85(v_n + 12) - 10{,}2$ car $u_n = v_n + 12$
$= 0{,}85v_n + 10{,}2 - 10{,}2$
$= 0{,}95v_n$ donc (v_n) est une suite géométrique de raison q = 0,85

et de 1er terme $v_0 = u_0 - 12 = 8 - 12 = -4$

b. Puisque (v_n) est une suite géométrique de raison q = 0,85 et de 1er terme $v_0 = -4$
alors $v_n = v_0 \times q^n = -4 \times 0{,}85^n$

c. $u_n = v_n + 12$ donc $u_n = -4 \times 0{,}85^n + 12 = 12 - 4 \times 0{,}85^n$

5/ Pour tout entier n, $u_{n+1} - u_n = 0{,}85u_n + 1{,}8 - u_n = -0{,}15u_n + 1{,}8$

or d'après la question 3, $u_n \leq 12$

donc $-0{,}15u_n \geq -0{,}15 \times 12$
c'est-à -dire $-0{,}15u_n \geq -1{,}8$
par conséquent, $-0{,}15u_n + 1{,}8 \geq 0$
donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$, ce qui prouve que la suite (u_n) est croissante .

Exercice 3 $f\,(x) = (x^2 + 2x - 3)^3$

on a $f = u^3$ *avec* $u(x) = x^2 + 2x - 3$
$u'(x) = 2x + 2$

or $(u^3)' = 3u'u^2$ d'où

$$f'(x) = 3 \times (2x + 2) \times (x^2 + 2x - 3)^2 = (6x + 6)(x^2 + 2x - 3)^2$$

La courbe représentative de la fonction f admet des tangentes parallèles à l'axe des abscisses si $f'(x) = 0$

Or $f'(x) = 0 \iff (6x + 6)(x^2 + 2x - 3)^2 = 0$

$\iff 6x + 6 = 0 \quad ou \quad (x^2 + 2x - 3)^2 = 0$

$\iff x = -1 \quad ou \quad x^2 + 2x - 3 = 0$

$\iff x = -1 \quad ou \quad x = 1 \quad ou \quad x = -3$

Donc la courbe représentative de la fonction f admet au moins une tangente parallèle à l'axe des abscisses.
L'affirmation 1 est fausse

Pour $f\,(x) = (x^2 + 2x - 3)^3$ on a $f'(x) = (6x + 6)(x^2 + 2x - 3)^2$

D'où

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$6x + 6$		$-$			0	$+$			
$(x^2 + 2x - 3)^2$	$+$		0	$+$			0	$+$	
$f'(x)$	$-$		0	$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$	↘			↘	$f(-1)$	↗		↗	

$a = 6 > 0$

La fonction f est donc croissante sur [-1 ; $+\infty$ [**. L'affirmation 2 est vraie.**

Le minimum de f est $f(-1) = ((-1)^2 + 2 \times (-1) - 3)^3 = (1 - 2 - 3)^3 = (-4)^3 = -64 \neq -216$.
L'affirmation 3 est fausse.