Terminales	**MATHEMATIQUES** : Devoir de remédiation CORRIGE

Exercice 1 :

Partie A

1. De 2000 à 2003, l'audience a baissé de 460 000 à 300 000 téléspectateurs, puis de 2003 à 2019 a régulièrement progressé à plus de 900 000 téléspectateurs.
2. On lit en 2014 environ 800 000 téléspectateurs.
3. $f'(0)$ nombre dérivé de la fonction en 0 est le coefficient directeur de la droite (AB), soit :
$f'(0) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{82-460}{3-0} = \frac{-378}{3} = -126.$

Partie B

1. 2014 correpond à $x = 14$ or $f(14) = (20 \times 14^2 - 80 \times 14 + 460)e^{-0,1\times 14} \approx 803{,}906$ soit 804 000 téléspectateurs

2.a. $f = u \times v$ avec $u(x) = 20x^2 - 80x + 460$ et $v(x) = e^{-0,1x}$
$u'(x) = 40x - 80$ $\quad$ $v'(x) = -0,1e^{-0.1x}$

Or $(uv)' = u'v + uv'$ d'où
$$\begin{aligned} f'(x) &= (40x-80)e^{-0.1x} + (20x^2 - 80x + 460) \times (-0,1e^{-0,1x}) \\ &= e^{-0,1x}(40x - 80 + (20x^2 - 80x + 460) \times (-0,1)) \\ &= e^{-0,1x}(40x - 80 - 2x^2 + 8x - 46) \\ &= e^{-0,1x}(-2x^2 + 48x - 126) \end{aligned}$$

b. Pour $-2x^2 + 48x - 126$,

$\Delta = 48^2 - 4 \times (-2) \times (-126) = 1296 > 0$ donc *le trinôme* admet 2 racines

$x_1 = \frac{-48-\sqrt{1296}}{2\times(-2)} = 21$ et $x_2 = \frac{-48+\sqrt{1296}}{2\times(-2)} = 3$

x	0		3		21		29
$e^{-0,1x}$				+			
$-2x^2 + 48x - 126$		−	0	+	0	−	
$f'(x)$		−	0	+	0	−	
$f(x)$	460	↘	$400\,e^{-0,3}$	↗	$7\,600\,e^{-2,1}$	↘	$14\,960\,e^{-2,9}$

c. Avant l'année 2029, c'est-à-dire pour $x \in [0\,;29]$, le maximum de f est $f(21) = 7\,600\,e^{-2,1} \approx 931$ (en milliers).

Or $931 < 1\,000$, donc le nombre journalier de téléspectateurs **ne dépassera pas** la barre du million avant l'année 2029.

Exercice 2 :

1. a. Chaque année, le nombre de pommiers par hectare diminue de 4 % donc il est multiplié par 0,96, puis on replante 22 pommiers par hectare, d'où $u_{n+1} = 0{,}96\,u_n + 22$

b. L'année 2020 correspond à $n = 2$, or $u_0 = 300$ et

$$u_1 = 0{,}96 \times u_0 + 22 = 0{,}96 \times 300 + 22 = 310$$

$$u_2 = 0{,}96 \times u_1 + 22 = 0{,}96 \times 310 + 22 = 319{,}6$$

Ainsi en 2020, il y avait environ **320 pommiers par hectare**.

2. a. Il faut montrer que pour tout entier n, $u_n < u_{n+1} < 550$

Initialisation : On a $u_0 = 300$ et $u_1 = 0{,}96 \times 300 + 22 = 310$ donc $u_0 < u_1 < 550$
donc la propriété est vraie au rang $n = 0$

Hérédité : On suppose qu'il existe un rang k ≥ 0 tel que $u_k < u_{k+1} < 550$
et on cherche alors à démontrer que $u_{k+1} < u_{k+2} < 550$

or $u_k < u_{k+1} < 550$
⇔ $0{,}96u_k < 0{,}96u_{k+1} < 528$
⇔ $0{,}96u_k + 22 < 0{,}96u_{k+1} + 22 < 550$ (or $u_{k+1} = 0{,}96u_k + 22$ et $u_{k+2} = 0{,}96u_{k+1} + 22$)
⇔ $u_{k+1} < u_{k+2} < 550$ donc l'hérédité est démontrée

Conclusion : la propriété est vraie pour $n = 0$ et elle est héréditaire, donc, d'après le principe de récurrence, pour tout entier n, on a

$$u_n < u_{n+1} < 550$$

b. On a donc, pour tout entier n, $u_n < u_{n+1}$ donc la suite (u_n) est croissante

et pour tout entier n, $u_n < 550$ donc la suite est majorée par 550,

ce qui signifie qu'à long terme, le nombre de pommiers par hectare va augmenter constamment sans jamais dépasser 550 pommiers par hectare.

3. On donne $v_n = u_n - 550$ donc $u_n = v_n + 550$

a. Si $v_n = u_n - 550$ *alors*

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 550 \\ &= 0{,}96u_n + 22 - 550 \\ &= 0{,}96u_n - 528 \\ &= 0{,}96(v_n + 550) - 528 \quad \text{car } u_n = v_n + 550 \\ &= 0{,}96v_n + 528 - 528 \\ &= 0{,}96v_n \end{aligned}$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison q = 0,96 et de 1er terme $v_0 = u_0 - 550 = 300 - 550 = -250$

b. Puisque (v_n) est une suite géométrique de raison q = 0,96 et de 1er terme $v_0 = -250$

alors $v_n = v_0 \times q^n = -250 \times 0{,}96^n$ or $u_n = v_n + 550$ donc $u_n = -250 \times 0{,}96^n + 550$

c. Pour estimer le nombre de pommiers de l'exploitation en 2025, il faut calculer u_7
or $u_7 = -250 \times 0{,}96^7 + 550 \approx 362$ mais u_7 représente le nombre de pommiers **par hectare.**
Ainsi, puisque l'exploitation de Laurence comporte 14 hectares, le nombre total de pommiers de l'exploitation de Laurence en 2025 est de $14 \times 362 = 5068$ soit 5068 pommiers.