| | | |
|---|---|---|
| Terminales Spécialité Maths | D S n° 1 | le 23 septembre 2024 |
| Durée : 1 h 45 | calculatrice autorisée | |

## <u>Exercice 1</u> : 7,5 points

Dans le parc national des Pyrénées, un chercheur travaille sur le déclin d'une espèce protégée dans les lacs de haute-montagne : le « crapaud accoucheur ».

Dans certains lacs des Pyrénées, des truites ont été introduites par l'homme afin de permettre des activités de pêche en montagne. Le chercheur a étudié l'impact de cette introduction sur la population de crapauds accoucheurs d'un lac.

Ses études précédentes l'amènent à modéliser l'évolution de cette population en fonction du temps par la fonction $f$ suivante :

$$f(t) = (0{,}04t^2 - 8t + 400)e^{0{,}02t} + 40 \quad \text{pour} \quad t \in [0\,;120]$$

La variable $t$ représente le temps écoulé, en jour, à partir de l'introduction à l'instant $t = 0$ des truites dans le lac, et $f(t)$ modélise le nombre de crapauds à l'instant $t$.

1. Déterminer le nombre de crapauds présents dans le lac lors de l'introduction des truites.
2. On admet que la fonction $f$ est dérivable sur l'intervalle [0; 120] et on note $f'$ sa fonction dérivée. Montrer, en faisant apparaitre les étapes du calcul, que pour tout nombre réel $t$ appartenant à l'intervalle [0; 120] on a :

$$f'(t) = (0{,}0008t^2 - 0{,}08t)e^{0{,}02t}$$

3. Étudier les variations de la fonction $f$ sur l'intervalle [0; 120], puis dresser le tableau de variations de $f$ sur cet intervalle (on donnera des valeurs approchées au centième).
4. Selon cette modélisation :
   a. Déterminer le nombre de jours $J$ nécessaires afin que le nombre de crapauds atteigne son minimum. Quel est ce nombre minimum ?
   b. Justifier que, après avoir atteint son minimum, le nombre de crapauds dépassera un jour 140 individus.
   c. À l'aide de la calculatrice, déterminer la durée en jour à partir de laquelle le nombre de crapauds dépassera 140 individus.

**<u>Exercice 2</u> : 8,5 points**

Une entreprise du secteur « Bâtiments et Travaux Publics » doit réduire la quantité de déchets qu'elle rejette pour respecter une nouvelle norme environnementale. Elle s'engage, à terme, à rejeter moins de 30 000 tonnes de déchets par an.

En 2007, l'entreprise rejetait 40 000 tonnes de déchets.
Depuis cette date, l'entreprise réduit chaque année la quantité de déchets qu'elle rejette de 5 % par rapport à la quantité rejetée l'année précédente, mais elle produit par ailleurs 200 tonnes de nouveaux déchets par an en raison du développement de nouvelles activités.
Pour tout entier naturel $n$, on note $r_n$ la quantité, en tonnes, de déchets pour l'année $(2007+n)$. On a donc $r_0 = 40000$.

1. **a.** Calculer $r_1$ et $r_2$.
   **b.** Justifier que pour tout entier $n$ naturel on a $r_{n+1} = 0{,}95 r_n + 200$.
2. Soit $(s_n)$ la suite définie pour tout entier naturel $n$ par $s_n = r_n - 4000$.
   **a.** Démontrer que la suite $(s_n)$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   **b.** Pour tout entier naturel $n$, exprimer $s_n$ en fonction de $n$.
   En déduire que, pour tout entier naturel $n$, on a $r_n = 36000 \times 0{,}95^n + 4000$.
   **c.** La quantité de déchets rejetée diminue-t-elle d'une année sur l'autre ? Justifier.
   **d.** Démontrer que la suite $(r_n)$ est minorée par 4 000.
   Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice
3. On considère l'algorithme ci-contre :
   **a.** Quel est le but de cet algorithme ?
   **b.** Déterminer à partir de quelle année, le contexte restant le même, l'entreprise réussira-t-elle à respecter son engagement.

```
R ←40 000
N ←0
Tant que R > 30 000
N ←N+ 1
R ←0,95R + 200
Fin du Tant que
Afficher  N
```

**<u>Exercice 3</u> : 4 points**

Soit $u$ la fonction définie sur ℝ par $u(x) = x^2 - 6x + 10$ et $v$ la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $v(x) = \sqrt{x}$.

On note $f$ la fonction définie par $f = v \circ u$

1) Déterminer l'expression algébrique de $f(x)$.

2) Justifier que la fonction $f$ est bien définie sur [ 0 ; 10 ]

3) Calculer $f'(x)$ et en déduire le tableau de variation de la fonction $f$ sur [ 0 ; 10 ]