Exercice 1

$$f(t) = (0,04t^2 - 8t + 400)e^{0,02t} + 40 \quad \text{pour } t \in [0 ; 120]$$

1. $f(0) = (0,04 \times 0^2 - 8 \times 0 + 400)e^{0,02 \times 0} + 40 = 440$ donc il y avait 440 crapauds présents dans le lac lors de l'introduction des truites.

2. $f = u \times v + 40$ avec $u(t) = 0,04t^2 - 8t + 400$ $v(t) = e^{0,02t}$
 $u'(t) = 0,08t - 8$ $v'(t) = 0,02e^{0,02t}$

or $(uv)' = u'v + uv'$ donc $f'(t) = (0,08t - 8)e^{0,02t} + (0,04t^2 - 8t + 400) \times 0,02e^{0,02t}$
 $= 0,08te^{0,02t} - 8e^{0,02t} + 0,0008t^2e^{0,02t} - 0,16te^{0,02t} + 8e^{0,02t}$
 $= 0,0008t^2e^{0,02t} - 0,08te^{0,02t}$

Ainsi $f'(t) = (0,0008t^2 - 0,08t)e^{0,02t}$

3. $0,0008t^2 - 0,08t$ est un trinôme dont les racines sont 0 et 100 et pour lequel $a = 0,0008 > 0$
 Ainsi, on a :

t	0		100		120
$0,0008t^2 - 0,08t$	0	-	0	+	
$e^{0,02t}$			+		
$f'(t)$	0	-	0	+	
$f(t)$	440		40		216,37

4. Selon cette modélisation :

- a. Le nombre de crapauds atteint son minimum au bout de $J = 100$ jours. Et le nombre minimum de crapauds est de 40.
- b. Après avoir atteint son minimum, le nombre de crapauds augmente constamment de 40 crapauds à environ 216, donc il dépassera un jour 140.
- c. D'après la calculatrice, le nombre de crapauds dépassera 140 individus au bout de 116 jours (car $f(115) \approx 130$ et $f(116) \approx 144$)

Exercice 2 :

1.a. Diminuer une quantité de 5% revient à appliquer le coefficient multiplicateur $1 - \frac{5}{100} = 0,95$

$$r_1 = r_0 \times 0,95 + 200 = 0,95 \times 40\,000 + 200 = 38\,200$$

r_2 est la quantité de déchets en $20012 + 2 = 2014$

$$r_2 = 0,95r_1 + 200 = 0,95 \times 38\,200 + 200 = 36\,490$$

b. r_n est la quantité de déchets de l'année $2012 + n$ et r_{n+1} est la quantité de déchets de l'année suivante
 r_n diminue de 5% donc on a alors $0,95r_n$ tonnes de déchets auquel on ajoute 200 tonnes de déchets
donc $r_{n+1} = 0,95r_n + 200$

2. $s_n = r_n - 4000$ donc $r_n = s_n + 4000$

a.
$$\begin{aligned} s_{n+1} &= r_{n+1} - 4000 \\ &= 0,95r_n + 200 - 4000 \\ &= 0,95r_n - 3800 \\ &= 0,95(s_n + 4000) - 3800 \quad \text{car } r_n = s_n + 4000 \\ &= 0,95s_n + 3800 - 3800 \\ &= 0,95s_n \end{aligned}$$

Donc (s_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,95$

et de 1^{er} terme $s_0 = r_0 - 4000 = 40\,000 - 4000 = 36\,000$

b. alors $s_n = s_0 \times q^n = 36\,000 \times 0,95^n$

or $r_n = s_n + 4000$

donc $r_n = 36\,000 \times 0,95^n + 4000$

c.
$$\begin{aligned} r_{n+1} - r_n &= 36\,000 \times 0,95^{n+1} + 4000 - (36\,000 \times 0,95^n + 4000) \\ &= 36\,000 \times 0,95^{n+1} + 4000 - 36\,000 \times 0,95^n - 4000 \\ &= 36\,000 \times 0,95^n \times 0,95 - 36\,000 \times 0,95^n \\ &= 36\,000 \times 0,95^n (0,95 - 1) \\ &= 36\,000 \times 0,95^n \times (-0,05) \\ &= -1800 \times 0,95^n \end{aligned}$$

Or $-1800 < 0$ et $0,95^n > 0$ donc $r_{n+1} - r_n < 0$ ce qui prouve que la suite (r_n) est décroissante

Ainsi, la quantité de rejets diminue d'une année sur l'autre.

d. $r_n - 4000 = 36\,000 \times 0,95^n + 4000 - 4000 = 36\,000 \times 0,95^n$

Or $36\,000 > 0$ et $0,95^n > 0$ donc $r_n - 4000 > 0$ ainsi $r_n > 4000$

ce qui prouve que la suite (r_n) est minorée par 4 000.

Cela signifie que la quantité de rejets ne deviendra jamais inférieure à 4000 au cours du temps.

3. On considère l'algorithme ci-contre :

```

R ← 40 000
N ← 0
Tant que R > 30 000
N ← N + 1
R ← 0,95R + 200
Fin du Tant que
Afficher N
    
```

a. Le but de cet algorithme est de déterminer le nombre N d'années à attendre afin que la quantité de rejets R devienne inférieure à 30 000

b. En programmant l'algorithme ou en utilisant la calculatrice, on trouve que la quantité de rejets devient inférieure à 30 000 au bout de 7 ans car $r_6 \approx 30\,463$ et $r_7 \approx 29\,140$

C'est donc en 2014 (2007 + 7) que l'entreprise a réussi à respecter son engagement.

Exercice 3 :

1) $f(x) = (v \circ u)(x) = v(u(x)) = v(x^2 - 6x + 10) = \sqrt{x^2 - 6x + 10}$

2) f est définie pour tout réel x tel que $x^2 - 6x + 10 \geq 0$

Or, pour $x^2 - 6x + 10$, on a $\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 10 = -4$

Donc le trinôme n'admet pas de racine et il est toujours du signe de $a = 1 > 0$

Ainsi, $x^2 - 6x + 10 > 0$ sur $\mathbb{R}$ donc la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

La fonction f étant définie sur $\mathbb{R}$, alors elle est bien définie sur $[0 ; 10]$

3) $f = \sqrt{u}$ avec $u(x) = x^2 - 6x + 10$ d'où $u'(x) = 2x - 6$

Or $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ donc $f'(x) = \frac{2x-6}{2\sqrt{x^2-6x+10}} = \frac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+10}}$

x	0	3	10
$x - 3$	-	0	+
$\sqrt{x^2 - 6x + 10}$		+	
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\sqrt{10}$		$5\sqrt{2}$