Exercice 1 :

1. L'effectif de cétacés au 31 octobre 2017 est de $3000 + 80$, c'est-à -dire 3080.
   Entre le 1er novembre et le 31 mai, une baisse de 5 % a lieu, l'effectif au 1er juin 2018 est donc:
   $$u_1 = 3080 - 5\% \times 3080 = 3080 \times 0{,}95 = 2926$$

2. En généralisant, on a, pour tout entier naturel n:
   $$u_{n+1} = (u_n + 80) \times 0{,}95 = 0{,}95u_n + 80 \times 0{,}95 = 0{,}95u_n + 76$$

3. Formule à entrer dans la cellule C2: **= 0.95*B2 + 76** .

4. a. Montrons, **par récurrence**, que pour tout entier n, $u_n \geq 1520$

Initialisation : On a $u_0 = 3000 \geq 1520$, la propriété est donc vraie pour $n = 0$.

Hérédité : On suppose qu'il existe un rang $k \geq 0$ tel que $u_k \geq 1520$
et on cherche à démontrer alors que $u_{k+1} \geq 1520$

Or $u_k \geq 1520$

$\Leftrightarrow$ $0{,}95\, u_k \geq 1520 \times 0{,}95$

$\Leftrightarrow$ $0{,}95u_k + 76 \geq 0{,}95 \times 1520 + 76$

$\Leftrightarrow$ $u_{k+1} \geq 1520$ donc la propriété est vraie au rang k+1

Conclusion : la propriété est vraie pour $n = 0$ et elle est héréditaire donc pour tout entier n, on a $u_n \geq 1520$

b. Pour tout entier n, $u_{n+1} - u_n = 0{,}95u_n + 76 - u_n = -0{,}05u_n + 76$

or d'après la question précédente, $u_n \geq 1520$,

donc $-0{,}05u_n \leq -0{,}05 \times 1520$

c'est-à -dire $-0{,}05u_n \leq -76$

par conséquent, $-0{,}05u_n + 76 \leq 0$

donc $u_{n+1} - u_n \leq 0$, ce qui prouve que la suite (u_n) est décroissante .

5. a. $v_n = u_n - 1520$ donc $u_n = v_n + 1520$

Si $v_n = u_n - 1520$ *alors* $v_{n+1} = u_{n+1} - 1520$

$= 0{,}95u_n + 76 - 1520$

$= 0{,}95u_n - 1444$

$= 0{,}95(v_n + 1520) - 1444$ car $u_n = v_n + 1520$

$= 0{,}95v_n + 1444 - 1444$

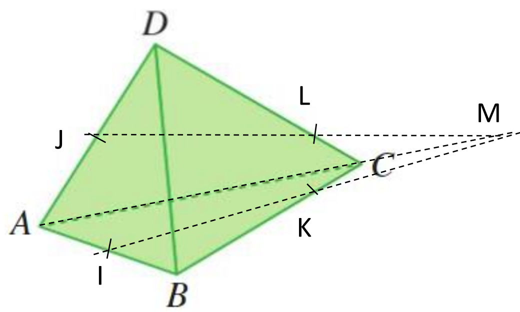
$= 0{,}95v_n$ donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0{,}95$

et de 1er terme $v_0 = u_0 - 1520 = 3000 - 1520 = 1480$

b. Puisque (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0{,}95$ et de 1er terme $v_0 = 1480$
alors $v_n = v_0 \times q^n = 1480 \times 0{,}95^n$ or $u_n = v_n + 1520$ donc $u_n = 1480 \times 0{,}95^n + 1520$

6. $n \leftarrow 0$
   $u \leftarrow 3000$
   Tant que $\boldsymbol{u > 2000}$
   $n \leftarrow \mathbf{n + 1}$
   $u \leftarrow \mathbf{0{,}95 \times u + 76}$

7. En programmant l'algorithme ou en utilisant la calculatrice, on trouve que $u_n \leq 2000$ pour $n = 22$
   ($u_{21} \approx 2024$ et $u_{22} \approx 1998$) donc la réserve fermera ses portes dans 22 ans soit en 2039 (2017 + 22)



<u>**Exercice 2 :**</u> On se place dans le repère (A ; $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$).

1) A (0 ; 0 ; 0)   C (0 ; 1 ; 0) $I\ (\frac{1}{2}\ ; 0\ ;\ 0)$ $J\ (0\ ;\ 0\ ;\ \frac{1}{2})$
   De plus B (1 ; 0 ; 0)

2) $\overrightarrow{BK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$

d'où $\begin{pmatrix} x_K-1 \\ y_K-0 \\ z_K-0 \end{pmatrix} = \frac{3}{4} \times \begin{pmatrix} 0-1 \\ 1-0 \\ 0-0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_K - 1 = -\frac{3}{4} \\ y_K = \frac{3}{4} \\ z_K = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_K = -\frac{3}{4} + 1 \\ y_K = \frac{3}{4} \\ z_K = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_K = \frac{1}{4} \\ y_K = \frac{3}{4} \\ z_K = 0 \end{cases}$

donc les coordonnées du point K sont ($\frac{1}{4}$; $\frac{3}{4}$; 0).

3) On a $\overrightarrow{IJ} \begin{pmatrix} 0-\frac{1}{2} \\ 0-0 \\ \frac{1}{2}-0 \end{pmatrix}$ $soit\ \overrightarrow{IJ} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ $et\ \overrightarrow{KL} \begin{pmatrix} 0-\frac{1}{4} \\ \frac{3}{4}-\frac{3}{4} \\ \frac{1}{4}-0 \end{pmatrix}$ $soit\ \overrightarrow{KL} \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ 0 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

Les vecteurs $\overrightarrow{IJ} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ $et\ \overrightarrow{KL} \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ 0 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ sont colinéaires car $\frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = 2$ donc $\overrightarrow{IJ} = 2\,\overrightarrow{KL}$ ce qui prouve que les droites (IJ) et (KL) sont parallèles. On en déduit alors que les points I, J , K et L sont coplanaires.

4) N (-1 ; $\frac{3}{2}$; 1)

On cherche α et β tels que $\overrightarrow{IN} = \alpha\,\overrightarrow{IJ} + \beta\,\overrightarrow{IK}$ avec $\overrightarrow{IN} \begin{pmatrix} -1-\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2}-0 \\ 1-0 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{IN} \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{IJ} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ $et\ \overrightarrow{IK} \begin{pmatrix} \frac{1}{4}-\frac{1}{2} \\ \frac{3}{4}-0 \\ 0-0 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{IK} \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \\ 0 \end{pmatrix}$

d'où $\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{3}{2} = -\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{4}\beta \\ \frac{3}{2} = 0\alpha + \frac{3}{4}\beta \\ 1 = \frac{1}{2}\alpha + 0\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}\alpha = -\frac{1}{4}\beta + \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} = \frac{3}{4}\beta \\ 1 = \frac{1}{2}\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}\alpha = -\frac{1}{4}\beta + \frac{3}{2} \\ \beta = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{4}} \\ \alpha = \frac{1}{\frac{1}{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}\alpha = -\frac{1}{4} \times 2 + \frac{3}{2} \\ \beta = 2 \\ \alpha = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 2 \\ \alpha = 2 \end{cases}$

ainsi $\alpha = 2$ et $\beta = 2$ donc $\overrightarrow{IN} = 2\,\overrightarrow{IJ} + 2\,\overrightarrow{IK}$ ce qui prouve que les points I, J , K et N sont coplanaires

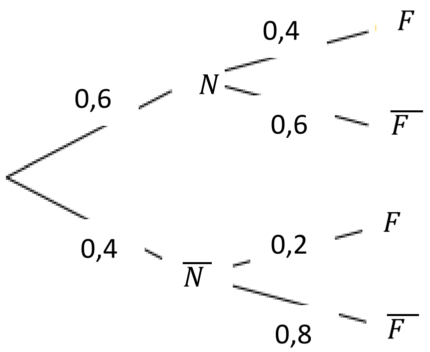
5) a) Le point M (0 ; $\frac{3}{2}$; 0) se situe sur la droite (AC)

b) Les vecteurs $\overrightarrow{IK} \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \\ 0 \end{pmatrix}$ $et\ \overrightarrow{IM} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ sont colinéaires car $\frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{4}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{4}} = 2$ donc les points I, K et M sont alignés.
Puisque les points J, L et M sont aussi alignés, alors on en déduit que le point M appartient aux 3 droites (AC) (IK) et (JL). On dit alors que ces 3 droites sont concourantes en M.

<u>Exercice 3</u> :

Partie A

1/



2/ N et $\overline{N}$ forment une partition de l'univers, donc d'après la formule des probabilités totales, on a

$$\begin{aligned} p(F) &= p(N \cap F) + p(\overline{N} \cap F) \\ &= p(N) \times p_N(F) + p(\overline{N}) \times p_{\overline{N}}(F) \\ &= 0{,}6 \times 0{,}4 + 0{,}4 \times 0{,}2 \\ &= 0{,}24 + 0{,}08 \\ &= 0{,}32 \end{aligned}$$

donc la probabilité que le bonbon choisi soit au goût « farceur » est égale à 0,32

3/ La probabilité recherchée est $p_F(N) = \frac{p(N\cap F)}{p(F)} = \frac{0{,}24}{0{,}32} = \frac{3}{4} = 0{,}75$

Partie B

1/ On répète 5 fois de manière identique et indépendante une même épreuve de Bernoulli pour laquelle la probabilité du succès S : « le bonbon est au goût farceur » est égale à 0,32.
Donc la variable aléatoire X associée au nombre de bonbons au goût « farceur » suit la loi binomiale de paramètres n= 5 et p = 0,32

2/ La probabilité recherchée est $P(X = 2) = \binom{5}{2} \times 0{,}32^2 \times (1 - 0{,}32)^3 \approx 0{,}321$

3/ La probabilité de prendre au moins un bonbon au goût « farceur » est

$p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - \binom{5}{0} \times 0{,}32^0 \times (1 - 0{,}32)^5 = 1 - 0{,}68^5 \approx 1 - 0{,}145 \approx 0{,}855 < 0{,}99$

Donc Bilal a tort car il a moins de 99% de chances de prendre au moins un bonbon au goût « farceur ».