| | | |
|---|---|---|
| Terminales Spé | **MATHEMATIQUES** : DS n° 2 | 02/12/2024 |
| Durée : 1 h 50 | *Calculatrice autorisée* | |

## EXERCICE 1 : 5 points

Dans une station de ski, il existe deux types de forfait selon l'âge du skieur :

- un forfait JUNIOR pour les personnes de moins de 25 ans;
- un forfait SENIOR pour les autres.

Par ailleurs, un usager peut choisir, en plus du forfait correspondant à son âge l'*option coupe-file* qui permet d'écourter le temps d'attente aux remontées mécaniques.
On admet que :

- 20 % des skieurs ont un forfait JUNIOR;
- 80 % des skieurs ont un forfait SENIOR;
- parmi les skieurs ayant un forfait JUNIOR, 6 % choisissent l'option coupe-file;
- parmi les skieurs ayant un forfait SENIOR, 12,5 % choisissent l'option coupe-file.

On interroge un skieur au hasard et on considère les évènements :

- $J$ : « le skieur a un forfait JUNIOR »;
- $C$ : « le skieur choisit l'option coupe-file ».

*Les deux parties peuvent être traitées de manière indépendante*

### Partie A

1. Traduire la situation par un arbre pondéré.
2. Démontrer que la probabilité que le skieur choisisse l'option coupe-file est égale à 0,112

### Partie B

On rappelle que la probabilité qu'un skieur choisisse l'option coupe-file est égale à 0,112.
On considère un échantillon de 30 skieurs choisis au hasard.
Soit $X$ la variable aléatoire qui compte le nombre des skieurs de l'échantillon ayant choisi t'option coupe-file.

1. On admet que X suit une loi binomiale. Donner les paramètres de cette loi.
2. Calculer, à $10^{-3}$ près, la probabilité qu'exactement 5 skieurs aient choisi l'option coupe-file.
3. Calculer, à $10^{-3}$ près, la probabilité qu'au moins 3 skieurs aient choisi l'option coupe-file.
4. Déterminer la valeur du plus petit entier $k$ tel que $P(X \leq k) > 0{,}99$. Interpréter le résultat.

## EXERCICE 2 : 6 points

Dans un repère de l'espace, on donne les points

$A\,(1\,;\,2\,;\,3)$ $B\,(3\,;\,0\,;\,1)$ $C\,(-1\,;\,5\,;\,1)$ $D\,(2\,;\,0\,;\,6)$ $E\,(-1\,;\,5\,;\,3)$ *et* $F\,(1\,;\,4\,;\,-3)$.

1) Déterminer les coordonnées du point $G$ défini par $\overrightarrow{EG} = \frac{2}{3}\,\overrightarrow{EF}$
2) Les points $A, B$ et $C$ sont-ils alignés ?
3) Déterminer 2 réels $\alpha$ et $\beta$ tels que $\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$.
4) Montrer que les droites $(AB)$ et $(CD)$ sont sécantes.

## EXERCICE 3 : 9 points

### Partie A

Soit $p$ la fonction définie sur l'intervalle $[-3\,;\,4]$ par :

$$p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 1$$

1. Déterminer les variations de la fonction $p$ sur l'intervalle $[-3\,;\,4]$.
2. Justifier que l'équation $p(x) = 0$ admet dans l'intervalle $[-3\,;\,4]$ une unique solution qui sera notée $\alpha$.
3. Déterminer une valeur approchée du réel $\alpha$ au dixième près.
4. Donner le tableau de signes de la fonction $p$ sur l'intervalle $[-3\,;\,4]$.

### Partie B

Soit $f$ la fonction définie sur l'intervalle $[-3\,;\,4]$ par :

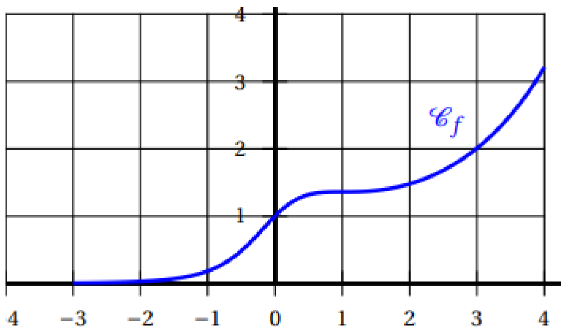
$$f(x) = \frac{e^x}{1 + x^2}$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

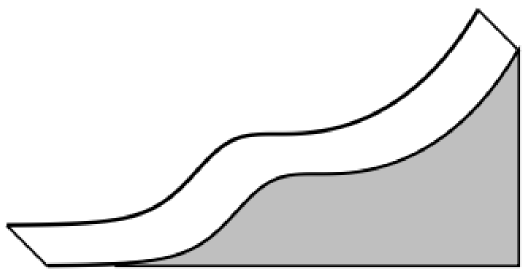
1. **a.** Déterminer la dérivée de la fonction $f$ sur l'intervalle $[-3\,;\,4]$.

   **b.** Justifier que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1.

2. Les concepteurs d'un toboggan utilisent la courbe $\mathscr{C}_f$ comme profil d'un toboggan. Ils estiment que le toboggan assure de bonnes sensations si le profil possède au moins deux points d'inflexion.




Représentation de la courbe $\mathscr{C}_f$



Vue de profil du toboggan

   **a.** D'après le graphique ci-dessus, le toboggan semble-t-il assurer de bonnes sensations ? Argumenter.

   **b.** On admet que la fonction $f''$, dérivée seconde de la fonction $f$, a pour expression pour tout réel $x$ de l'intervalle $[-3\,;\,4]$ :

$$f''(x) = \frac{p(x)(x-1)e^x}{\left(1 + x^2\right)^3}$$

   où $p$ est la fonction définie dans la partie A.

   En utilisant l'expression précédente de $f''$, répondre à la question : « le toboggan assure-t-il de bonnes sensations ? ». Justifier.